

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

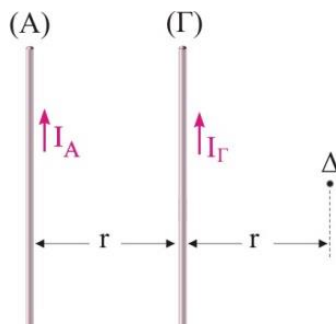
ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Οι παράλληλοι ευθύγραμμοι αγωγοί (Α), (Γ) του διπλανού σχήματος και το σημείο Δ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Η απόσταση μεταξύ των αγωγών είναι r και διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα ίδιας έντασης, $I_A = I_\Gamma$.

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός (Α), στο σημείο Δ που απέχει r από τον αγωγό (Γ), είναι B .

Το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Δ είναι



α. B .

β. $2B$.

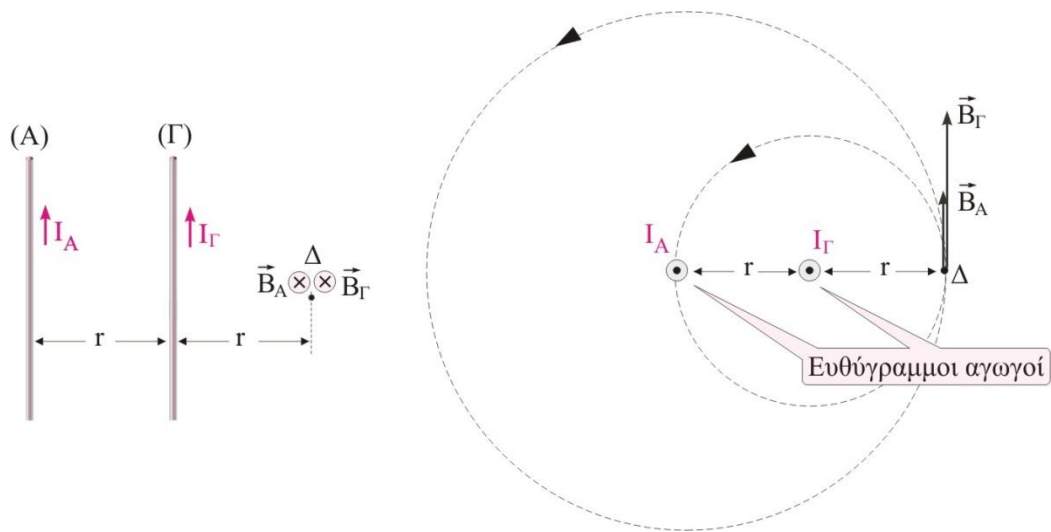
γ. $3B$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Σχεδιάζουμε τις δυναμικές γραμμές που διέρχονται από το σημείο Δ. Είναι κύκλοι με κέντρα τους αγωγούς και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Τα διανύσματα της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο Δ είναι ομόρροπα και έχουν μέτρα

$$B_A = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I_A}{2r} = B ,$$

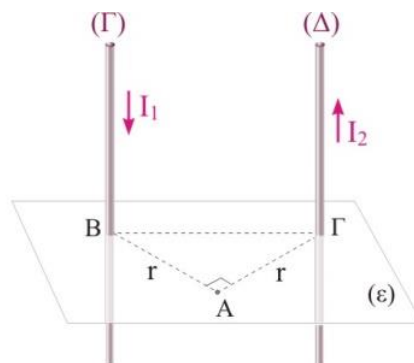
$$B_\Gamma = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I_\Gamma}{r} \xrightarrow{I_A=I_\Gamma} B_\Gamma = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I_A}{r} = 2B$$

$$\text{Άρα, } B_\Delta = B_A + B_\Gamma \Rightarrow B_\Delta = 3B$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 2.

Οι ευθύγραμμοι αγωγοί (Γ) και (Δ) του διπλανού σχήματος είναι κάθετοι στο επίπεδο (ε) και διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα έντασης I_1 και I_2 αντίστοιχα. Το σημείο Α ισαπέχει r από τους αγωγούς με την τομή ΑΒΓ να είναι ισοσκελές τρίγωνο με ορθή γωνία στο Α. Στο σημείο Α, το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου εξαιτίας του αγωγού (Γ) είναι B_1 , ενώ το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο ίδιο σημείο είναι $B_A = 2B_1$.



Η σχέση που συνδέει τις εντάσεις των ρευμάτων I_1 , I_2 είναι

α. $I_2 = 2I_1$ β. $I_2 = \sqrt{3} I_1$ γ. $I_2 = \sqrt{2} I_1$

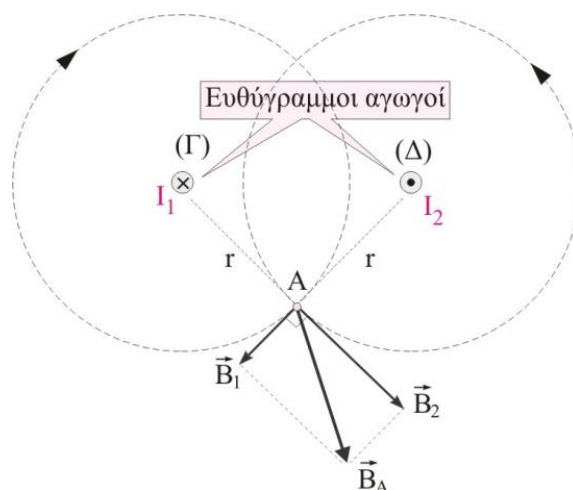
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Σχεδιάζουμε τις δυναμικές γραμμές που διέρχονται από το Α. Είναι κύκλοι με κέντρα τους αγωγούς και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Από το σχήμα, φαίνεται ότι τα διανύσματα B_1 και B_2 είναι κάθετα μεταξύ τους, επομένως το μέτρο της ολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο Α υπολογίζεται με τη χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος.



$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{r} \quad (1), \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{r} \quad (2), \quad B_A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

Από την εκφώνηση έχουμε $B_A = 2B_1$ επομένως

$$2B_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow 4B_1^2 = B_1^2 + B_2^2 \Rightarrow B_2^2 = 3B_1^2$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με τις (1), (2) παίρνουμε

$$B_2^2 = 3B_1^2 \Rightarrow \left(\frac{2k_\mu I_2}{r} \right)^2 = 3 \left(\frac{2k_\mu I_1}{r} \right)^2 \Rightarrow I_2^2 = 3I_1^2 \Rightarrow I_2 = \sqrt{3} I_1$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 3.

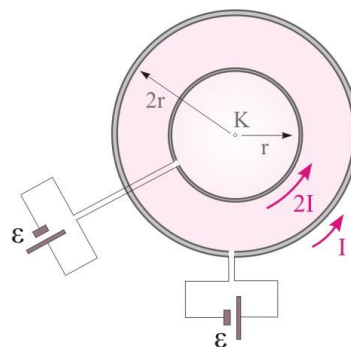
Οι ομόκεντροι κυκλικοί αγωγοί του σχήματος έχουν ακτίνες r και $2r$ και διαρρέονται από ρεύματα έντασης $2I$ και I αντίστοιχα. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο K των κυκλικών αγωγών είναι

α. $\frac{\mu_0 \pi I}{4\pi r}$.

β. $\frac{\mu_0 5\pi I}{4\pi r}$.

γ. 0.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.



Λύση

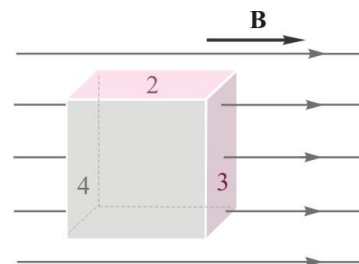
Σωστή απάντηση είναι η (β)

Οι δύο αγωγοί διαρρέονται από ρεύματα ίδιας φοράς, επομένως οι εντάσεις των δύο μαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται από τους δύο κυκλικούς αγωγούς στο σημείο K έχουν την ίδια φορά

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi \cdot 2I}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{2r} = \frac{\mu_0 5\pi I}{4\pi r}$$

Ερώτηση 4.

Ένα άδειο κυβικό κουτί βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου η ένταση B είναι κάθετη στις παράλληλες έδρες 3 και 4. Κάθε έδρα του κύβου έχει εμβαδό A .



α. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από τις κατακόρυφες έδρες 3 και 4 είναι συνολικά $+BA$.

β. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την βάση 2 είναι $+BA$.

γ. Η ολική μαγνητική ροή που διέρχεται από το κουτί είναι ίση με μηδέν.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετες στις έδρες 3 και 4 και η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα A με αυτές είναι 0° και 180° αντίστοιχα.

Η έδρα 2, όπως και όλες οι υπόλοιπες έδρες του κουτιού, είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

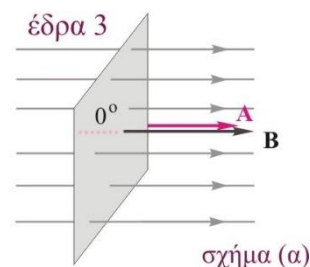
Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την έδρα 3 (σχήμα α) είναι $\Phi_3 = BA \sin 0^\circ = BA$.

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την έδρα 4 (σχήμα β) είναι $\Phi_4 = BA \sin 180^\circ = -BA$.

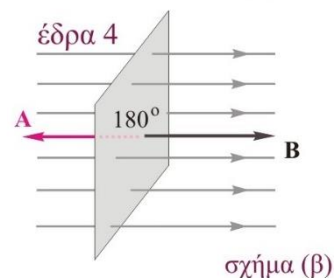
Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την έδρα 2 (σχήμα γ) είναι $\Phi_2 = BA \sin 90^\circ = 0$.

Το ίδιο ισχύει για τις υπόλοιπες έδρες που είναι παράλληλες στις δυναμικές γραμμές.

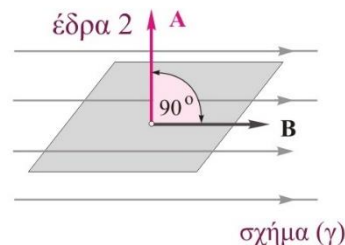
Η συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από το κουτί είναι $\Phi_{ολ} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 = 0 + 0 + BA - BA + 0 + 0$ ή $\Phi_{ολ} = 0$



σχήμα (α)



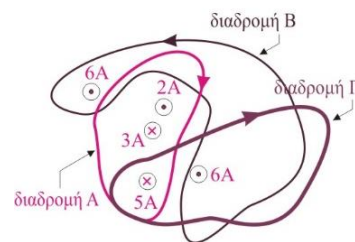
σχήμα (β)



σχήμα (γ)

Ερώτηση 5.

Οι 5 αγωγοί του σχήματος έχουν διεύθυνση που είναι κάθετη στη σελίδα και διαρρέονται από σταθερά ρεύματα των οποίων οι εντάσεις αναγράφονται δίπλα σε κάθε αγωγό. Το άθροισμα των $\sum B\Delta\ell \sin\theta$



- είναι ίσο με μηδέν για την διαδρομή Α.
- είναι ίσο με μηδέν για την διαδρομή Β.
- είναι ίσο με μηδέν για την διαδρομή Γ.
- δεν είναι ίσο με μηδέν για κάποια από τις παραπάνω διαδρομές.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η δ.

Σύμφωνα με το νόμο του Ampere, κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής το άθροισμα των γινομένων $\sum B\Delta\ell \sin\theta$ ισούται με $\mu_0 I_{\text{εγκ}}$, όπου $I_{\text{εγκ}}$ το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που διέρχονται από την επιφάνεια η οποία εγκλείεται από την κλειστή διαδρομή, δηλαδή

$$\sum B\Delta\ell \sin\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

Για τη διαδρομή Α, σύμφωνα με το νόμο του Ampere έχουμε:

$$\sum \Delta B_i \Delta \ell_i \sin\theta_i = \mu_0 (3A + 5A - 2A) \Rightarrow \sum \Delta B_i \Delta \ell_i \sin\theta_i = \mu_0 6 \text{ (SI)} \neq 0$$

Για τη διαδρομή Β, σύμφωνα με το νόμο του Ampere έχουμε:

$$\sum \Delta B_i \Delta \ell_i \sin\theta_i = \mu_0 (6A + 6A) \Rightarrow \sum \Delta B_i \Delta \ell_i \sin\theta_i = \mu_0 12 \text{ (SI)} \neq 0$$

Για τη διαδρομή Γ, σύμφωνα με το νόμο του Ampere έχουμε:

$$\sum \Delta B_i \Delta \ell_i \sin\theta_i = \mu_0 (5A - 6A) \Rightarrow \sum \Delta B_i \Delta \ell_i \sin\theta_i = -\mu_0 1 \text{ (SI)} \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι άθροισμα $\sum B\Delta\ell \sin\theta$ δεν είναι μηδέν για κάποια από τις παραπάνω διαδρομές.

Ερώτηση 6.

Ένας κυκλικός αγωγός (Α) συνδέεται με ιδανική πηγή σταθερής τάσης, οπότε δημιουργεί μαγνητικό πεδίο του οποίου η ένταση στο κέντρο του έχει μέτρο B . Χρησιμοποιούμε το σύρμα του κυκλικού αγωγού και σχηματίζουμε ένα κυκλικό πλαίσιο (Γ) με δύο σπείρες, το οποίο συνδέουμε με την ίδια πηγή. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου (Γ) είναι

α. B .

β. $2B$.

γ. $4B$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Χρησιμοποιούμε το ίδιο σύρμα, επομένως η αντίστασή του είναι ίδια και εφόσον το συνδέουμε με την ίδια πηγή, διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα.

Αν το σύρμα έχει μήκος ℓ , για τη σχέση ανάμεσα στις δύο ακτίνες των κυκλικών αγωγών έχουμε:

Αγωγός (Α), 1 σπείρα, $\ell = 2\pi r$,

Αγωγός (Γ): 2 σπείρες, $\ell = 2 \cdot 2\pi r'$,

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε

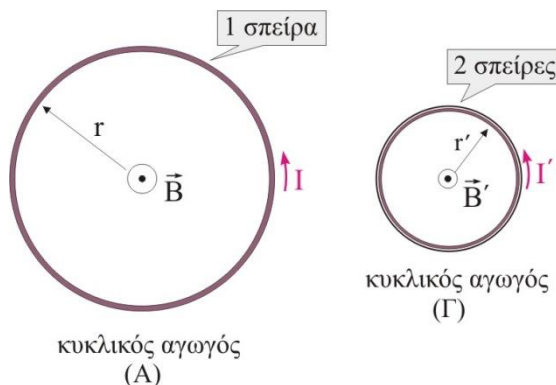
$$2\pi r = 4\pi r' \Rightarrow r' = r/2$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού (Α) είναι

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r}, \quad (1)$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού (Γ) που έχει 2 σπείρες είναι

$$B' = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r'}, \quad (2)$$



Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε

$$\frac{B}{B'} = \frac{\frac{\mu_o 2\pi I}{4\pi r}}{2 \frac{\mu_o 2\pi I}{4\pi r/2}} \Rightarrow \frac{B}{B'} = \frac{1}{4} \Rightarrow B' = 4B .$$

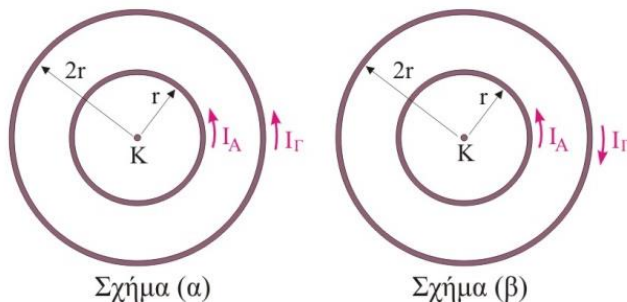
Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 7.

Οι ομόκεντροι κυκλικοί αγωγοί του σχήματος έχουν ακτίνες r και $2r$ και διαρρέονται από ρεύματα έντασης I_A και I_Γ αντίστοιχα.

Στο σχήμα (α), όπου τα ρεύματα είναι ομόρροπα, το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο Κ είναι B_1 .

Στο σχήμα (β), όπου η ένταση του ρεύματος I_Γ έχει αντιστραφεί, το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο Κ είναι B_2 με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.



Αν $B_1 = 5B_2$ ο λόγος $\frac{I_A}{I_\Gamma}$ είναι

α. $\frac{1}{3}$.

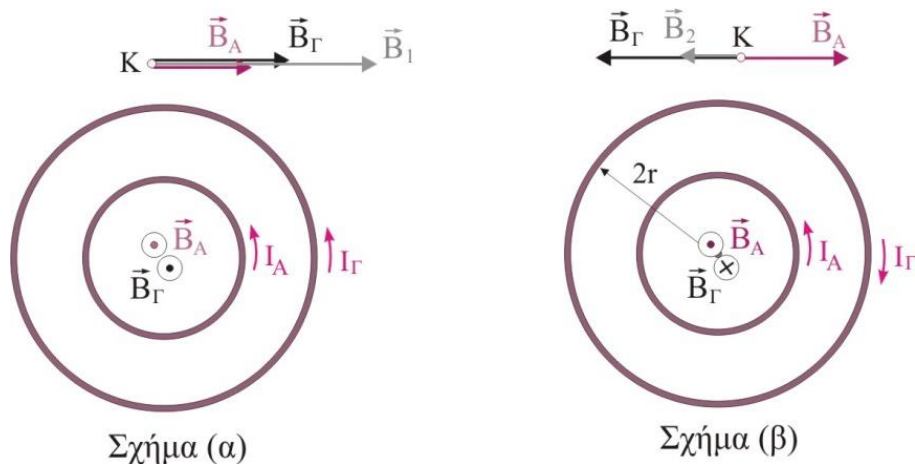
β. $\frac{2}{3}$.

γ. $\frac{3}{4}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.



Σχήμα (α):

$$B_1 = B_A + B_\Gamma \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I_A}{r} + \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I_\Gamma}{2r} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi}{r} \left(I_A + \frac{I_\Gamma}{2} \right), \quad (1)$$

Σχήμα (β):

Επειδή η φορά του B_2 είναι από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, $B_\Gamma > B_A$.

$$B_2 = B_\Gamma - B_A \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I_\Gamma}{2r} - \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I_A}{r} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi}{r} \left(\frac{I_\Gamma}{2} - I_A \right), \quad (2)$$

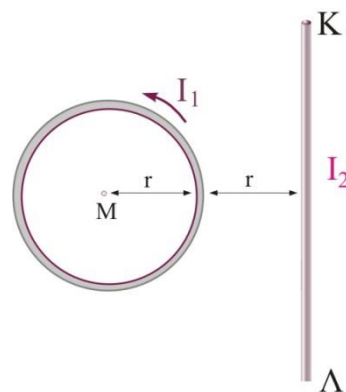
Από την εκφώνηση έχουμε $B_1 = 5B_2$, οπότε με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi}{r} \left(I_A + \frac{I_\Gamma}{2} \right) = 5 \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi}{r} \left(\frac{I_\Gamma}{2} - I_A \right) \Rightarrow I_A + \frac{I_\Gamma}{2} = 5 \frac{I_\Gamma}{2} - 5I_A \Rightarrow \frac{I_A}{I_\Gamma} = \frac{1}{3}.$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 8.

Ο κυκλικός αγωγός ακτίνας r και ο ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ του σχήματος βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τον ευθύγραμμο αγωγό να απέχει $2r$ από το κέντρο του κυκλικού αγωγού. Ο κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού και η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο Μ του κυκλικού αγωγού είναι ίση με μηδέν.



Ο ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα με φορά από το

α. Κ προς το Λ και έντασης $I_2 = \pi I_1$.

β. Κ προς το Λ και έντασης $I_2 = 2\pi I_1$.

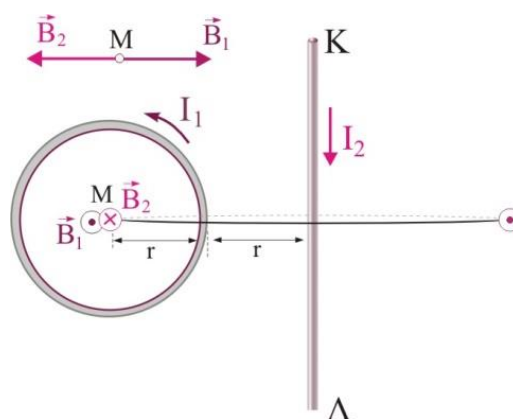
γ. Λ προς το Κ και έντασης $I_2 = 2\pi I_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου, B_1 , στο Μ λόγω του κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Επομένως για να είναι η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο Μ ίση με μηδέν, θα πρέπει το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου λόγω του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού ΚΛ, B_2 , να έχει φορά αντίθετη, δηλαδή από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η φορά του ρεύματος που διαρρέει τον ΚΛ να είναι από το Κ προς το Λ.



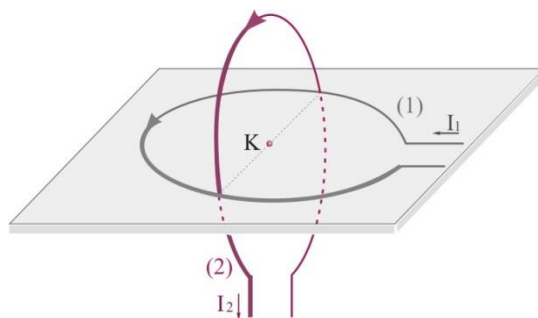
Στο Μ έχουμε:

$$B_M = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{2r} \Rightarrow \pi I_1 = \frac{I_2}{2} \Rightarrow I_2 = 2\pi I_1$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 9.

Οι κυκλικοί αγωγοί (1), (2) του σχήματος έχουν κοινό κέντρο Κ και τα επίπεδά τους είναι μεταξύ τους κάθετα. Αν B_1 , B_2 , είναι τα μέτρα των εντάσεων των μαγνητικών πεδίων στο Κ λόγω των αγωγών (1) και (2) αντίστοιχα, τότε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ, B_K , δίνεται από τη σχέση



α. $B_K = B_1 + B_2$.

β. $B_K = B_1 - B_2$.

γ. $B_K = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$.

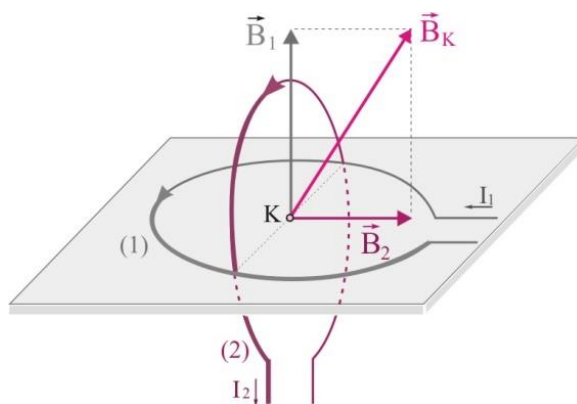
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Σχεδιάζουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ λόγω του κάθε κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού ξεχωριστά.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού στον αγωγό (1) παρατηρούμε ότι η ένταση B_1 στο Κ έχει φορά προς τα πάνω και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού (2).



Εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού στον αγωγό (2) η φορά της έντασης B_2 στο Κ είναι προς τα δεξιά και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού (1).

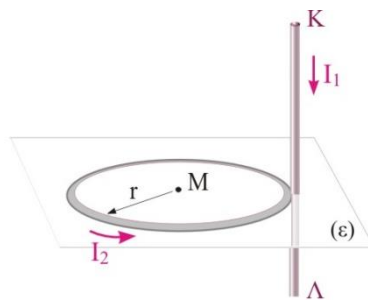
Τα επίπεδα είναι μεταξύ τους κάθετα, επομένως και οι εντάσεις B_1 και B_2 είναι κάθετες μεταξύ τους. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα, το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου B_K στο Κ δίνεται από τη σχέση

$$B_K = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 10.

Ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός (ΚΛ) του σχήματος είναι κάθετος στο επίπεδο (ε) και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 με φορά από το Κ προς το Λ. Ο κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (ε) και εφάπτεται στον αγωγό (ΚΛ). Ο κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού και έχει ένταση I_2 η οποία συνδέεται με την ένταση I_1 με τη σχέση, $I_1 = \pi I_2$.



Αν το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Μ λόγω του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού είναι B_1 , τότε η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Μ έχει μέτρο

α. B_1 .

β. $\sqrt{2} B_1$.

γ. $\sqrt{3} B_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

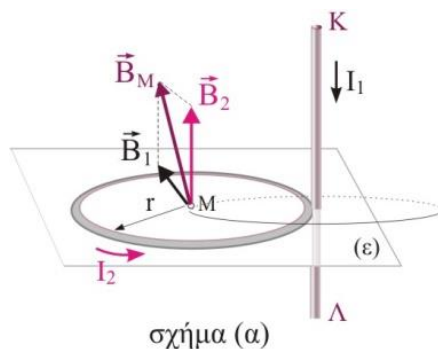
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Σχεδιάζουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Μ λόγω του κάθε ρευματοφόρου αγωγού ξεχωριστά.

Η μαγνητική δυναμική γραμμή λόγω του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού είναι κύκλος με κέντρο τον αγωγό ΚΛ με την ένταση B_1 να είναι εφαπτόμενη στο σημείο Μ, να βρίσκεται πάνω στο

επίπεδο (ε) και να έχει μέτρο $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{r}$



Η ένταση B_2 στο σημείο Μ λόγω του κυκλικού αγωγού είναι κάθετη στο επίπεδο (ε), με φορά

προς τα πάνω και έχει μέτρο $B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_2}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi \frac{I_1}{\pi}}{r} \Rightarrow B_2 = B_1$

Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα, το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Μ, B_M , δίνεται από τη σχέση

$$B_M = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2B_1^2} \Rightarrow B_M = B_1\sqrt{2}$$

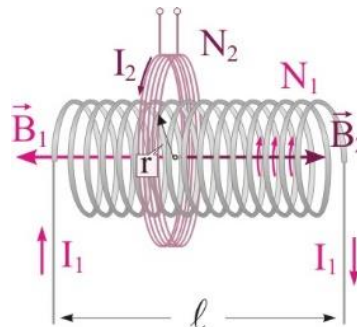
Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 11.

Το σωληνοειδές του σχήματος έχει N_1 σπείρες, μήκος ℓ και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 .

Το κυκλικό πλαίσιο που το περιβάλλει έχει $N_2=10N_1$ σπείρες, ακτίνα r όπου $r=\ell/4$ και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_2 .

Οι άξονες του σωληνοειδούς και του κυκλικού πλαισίου συμπίπτουν. Αν το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου είναι μηδέν, τότε ο λόγος I_1/I_2 των εντάσεων των ρευμάτων είναι



α. 5.

β. 10 .

γ. 20.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου είναι μηδέν, επομένως

$$B_{\text{ολ}} = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \mu_o \frac{N_1}{\ell} I_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I_2}{r} N_2, \quad (1)$$

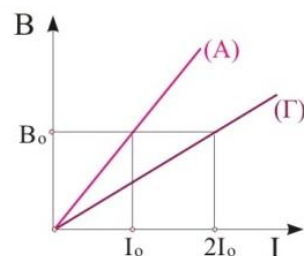
Από την εκφώνηση έχουμε $N_2=10N_1$ και $r=\ell/4$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\mu_o \frac{N_1}{4r} I_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I_2}{r} 10N_1 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 20.$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 12.

Στο διπλανό διάγραμμα δείχνεται το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο μέσον δύο σωληνοειδών (Α) και (Γ) σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το καθένα. Δίνεται ότι το σωληνοειδές (Α) έχει διπλάσιο αριθμό σπειρών από το (Γ). Τα μήκη των δύο σωληνοειδών συνδέονται με τη σχέση



α. $\ell_A = \ell_\Gamma$.

β. $\ell_A = 2\ell_\Gamma$.

γ. $\ell_A = \frac{1}{2}\ell_\Gamma$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου στα δύο σωληνοειδή είναι ίδια, ($B_A = B_\Gamma = B_0$), το σωληνοειδές (Γ) διαρρέεται από ρεύμα διπλάσιας έντασης από αυτό του (Α) ($I_\Gamma = 2I_A$). Επομένως

$$B_A = B_\Gamma \Rightarrow \mu_o \frac{N_A}{\ell_A} I_A = \mu_o \frac{N_\Gamma}{\ell_\Gamma} I_\Gamma$$

Παίρνοντας υπόψη ότι $I_\Gamma = 2I_A$, $N_A = 2N_\Gamma$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\mu_o \frac{2N_\Gamma}{\ell_A} I_A = \mu_o \frac{N_\Gamma}{\ell_\Gamma} 2I_A \Rightarrow \ell_A = \ell_\Gamma$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 13.

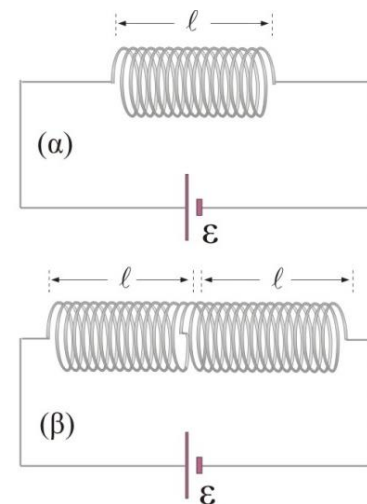
Ένα σωληνοειδές συνδέεται με ιδανική πηγή σταθερής τάσης και το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του είναι B (σχήμα α).

Ενώνουμε το σωληνοειδές με ένα άλλο όμοιο του, δημιουργώντας ένα νέο σωληνοειδές διπλάσιου μήκους. Συνδέουμε το νέο σωληνοειδές με την ίδια ιδανική πηγή τάσης (σχήμα β). Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του νέου σωληνοειδούς είναι

α. B .

β. $2B$.

γ. $B/2$.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

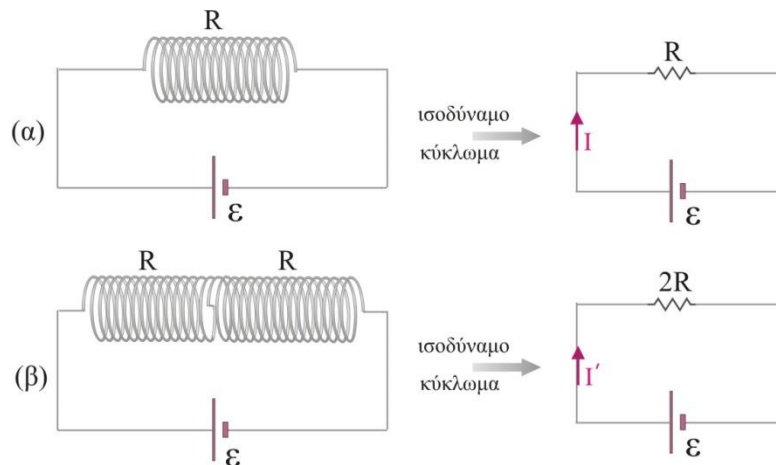
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Κάθε σωληνοειδές έχει N σπείρες, μήκος ℓ και αντίσταση R .

Στο σχήμα (α), όπου αυτό έχει συνδεθεί με ιδανική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης ε , η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει

$$\text{είναι } I = \frac{\varepsilon}{R}$$



και η ένταση του μαγνητικού πεδίου B στο εσωτερικό του δίνεται από τη σχέση

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 \frac{N}{\ell} \frac{\varepsilon}{R}$$

Στο σχήμα (β) έχουμε συνδέσει την ίδια πηγή με τα δύο σωληνοειδή σε σειρά, επομένως η νέα ένταση του ρεύματος I' που διαρρέει το νέο σωληνοειδές είναι $I' = \frac{\varepsilon}{2R}$

και η ένταση του μαγνητικού πεδίου B' στο εσωτερικό του δίνεται από τη σχέση

$$B' = \mu_0 \frac{2N}{2\ell} I' = \mu_0 \frac{N}{\ell} \frac{\varepsilon}{2R} \Rightarrow B' = \frac{B}{2}$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 14.

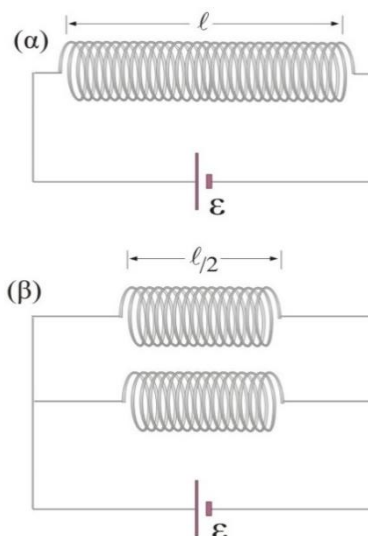
Σε ένα σωληνοειδές, όταν συνδέεται με μια ιδανική πηγή σταθερής τάσης, δημιουργείται στο εσωτερικό του μαγνητικό πεδίο έντασης B (σχήμα α). Κόβουμε το σωληνοειδές στη μέση και συνδέουμε τα δύο ίδια σωληνοειδή που δημιουργήθηκαν παράλληλα μεταξύ τους και την όλη διάταξη με την ίδια ιδανική πηγή (σχήμα β).

Στο εσωτερικό κάθε σωληνοειδούς δημιουργείται μαγνητικό πεδίο που η έντασή του έχει μέτρο

α. B .

β. $2B$.

γ. $B/2$.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Το αρχικό σωληνοειδές έχει N σπείρες, μήκος ℓ και αντίσταση R .

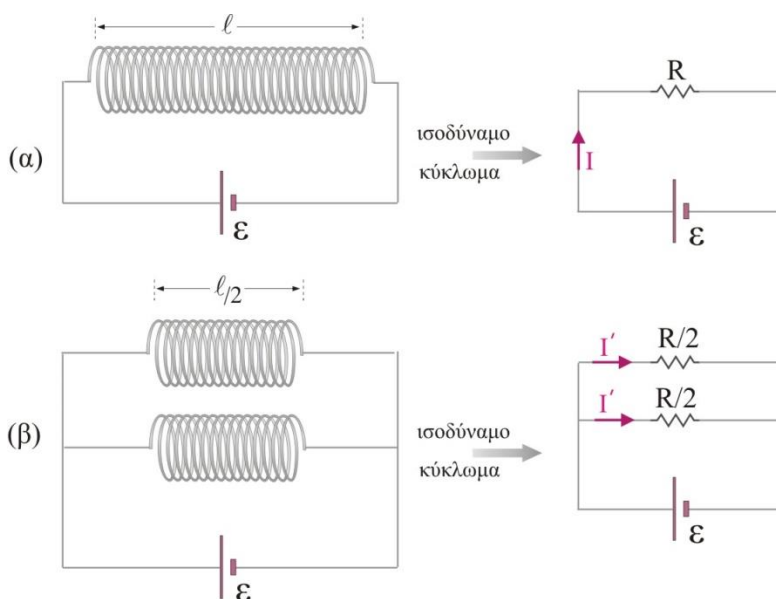
Όταν το σωληνοειδές κοπεί στη μέση θα έχει $N/2$ σπείρες, μήκος $\ell/2$ και αντίσταση $R/2$.

Στο σχήμα (α), όπου αυτό έχει συνδεθεί με ιδανική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης ε , η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει είναι

$I = \frac{\varepsilon}{R}$ και η ένταση του μαγνητικού πεδίου B στο εσωτερικό του δίνεται από τη σχέση

$$B = \mu_o \frac{N}{\ell} I = \mu_o \frac{N}{\ell} \frac{\varepsilon}{R}.$$

Στο σχήμα (β) έχουμε συνδέσει την ίδια ιδανική πηγή με τα δύο σωληνοειδή παράλληλα μεταξύ τους, επομένως η ένταση του ρεύματος I' που διαρρέει το κάθε σωληνοειδές είναι



$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R/2} \Rightarrow I' = 2 \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

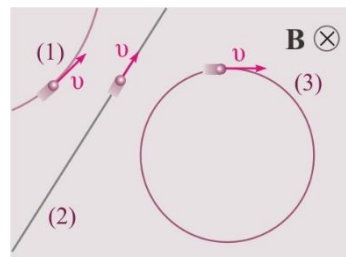
και η ένταση του μαγνητικού πεδίου B' στο εσωτερικό του δίνεται από τη σχέση

$$B' = \mu_o \frac{N/2}{\ell/2} I' = \mu_o \frac{N}{\ell} \frac{2\mathcal{E}}{R} \Rightarrow B' = 2B$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 15.

Τρία σωματίδια, ένα μονοσθενές θετικό ιόν νατρίου, ένα νετρόνιο και ένα μονοσθενές αρνητικό ιόν φθορίου εκτοξεύονται με ταχύτητα u κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Από τις τρεις τροχιές του σχήματος η τροχιά που διαγράφει το μονοσθενές ιόν νατρίου μπορεί να είναι μόνο η



α. τροχιά (1).

β. τροχιά (2).

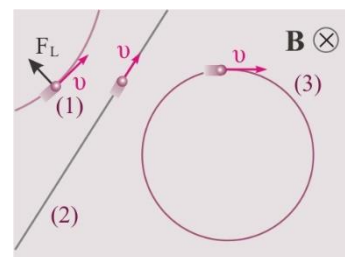
γ. τροχιά (3).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα u κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, δέχεται τη δύναμη Lorentz η οποία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Έτσι, έχοντας από την εκφώνηση διαθέσιμες τις κυκλικές τροχιές μπορούμε να βρούμε τη φορά της κεντρομόλου δύναμης, άρα και τη φορά της δύναμης Lorentz.



Έχοντας διαθέσιμη και τη φορά διαγραφής κάθε κυκλικής τροχιάς, με εφαρμογή του κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η τροχιά (1) ανήκει σε θετικά φορτισμένο σωματίδιο και η τροχιά (3) σε αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο. Άρα, στο μονοσθενές ιόν νατρίου μπορεί να ανήκει μόνο η τροχιά (1).

Ερώτηση 16.

Οι δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου είναι παράλληλες στο επίπεδο P_1 όπως δείχνεται στο σχήμα. Το θετικά φορτισμένο σωματίδιο που εκτοξεύεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές θα κινηθεί σε καμπύλη τροχιά που θα βρίσκεται στο επίπεδο

α. P_1 .

β. P_2 .

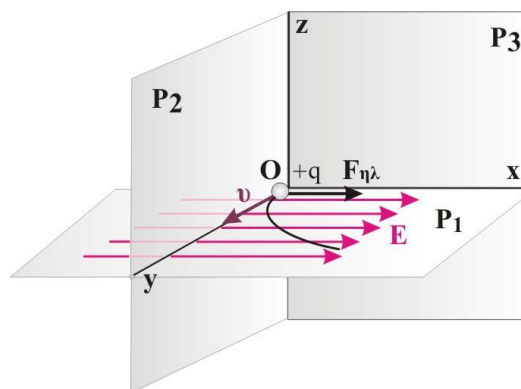
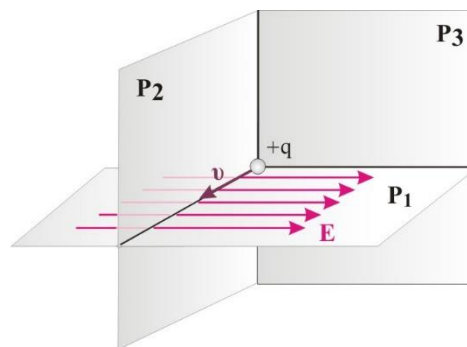
γ. P_3 .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

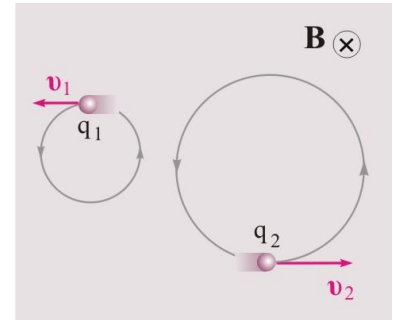
Σωστή απάντηση είναι η α.

Στο θετικά φορτισμένο σωματίδιο ασκείται ηλεκτρική δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο, η οποία έχει σταθερό μέτρο και σταθερή φορά που συμπίπτει με την φορά των δυναμικών γραμμών του πεδίου, δηλαδή η ηλεκτρική δύναμη βρίσκεται πάνω στον άξονα Ox . Το σωματίδιο στον άξονα Ox εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Στον άξονα Oy το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Άρα, η παραβολική τροχιά, που προκύπτει από την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων βρίσκεται στο επίπεδο xOy , δηλαδή πάνω στο επίπεδο P_1 .



Ερώτηση 17.

Τα δύο σωματίδια του σχήματος κινούνται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Τα σωματίδια εκτελούν κυκλικές τροχιές έχοντας ίδιες κινητικές ενέργειες και ίδιες μάζες. Αν $|q_1|, |q_2|$ είναι τα φορτία των σωματιδίων τότε



α. $|q_1| < |q_2|$, $q_1 > 0$, $q_2 < 0$

β. $|q_1| < |q_2|$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$

γ. $|q_1| > |q_2|$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από τις κυκλικές τροχιές του σχήματος της εκφώνησης μπορούμε να βρούμε τη φορά της κεντρομόλου δύναμης, άρα και τη φορά της δύναμης Lorentz.

Έχοντας διαθέσιμη και τη φορά διαγραφής κάθε κυκλικής τροχιάς, με εφαρμογή του κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι και οι δύο τροχιές ανήκουν σε θετικά φορτισμένα σωματίδια.

Σύμφωνα με την εκφώνηση τα σωματίδια έχουν ίσες μάζες και ίσες κινητικές ενέργειες, άρα έχουν και ίσες ταχύτητες. Οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών είναι

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{|q_1| B} , \quad R_2 = \frac{m_2 v_2}{|q_2| B}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{m_1 v_1}{|q_1| B}}{\frac{m_2 v_2}{|q_2| B}} = \frac{|q_2|}{|q_1|}$$

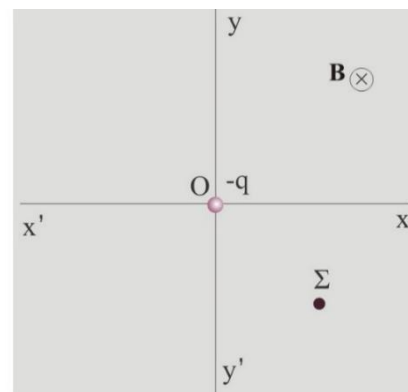
Από το σχήμα προκύπτει ότι $R_2 > R_1$, επομένως $|q_1| > |q_2|$.

Ερώτηση 18.

Στο σχήμα δείχνεται ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο το οποίο βρίσκεται στο σημείο τομής του ορθογωνίου συστήματος αξόνων $x'Ox$ και $y'Oy$ και ένας ακλόνητος στόχος Σ . Στο χώρο υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Για να συναντήσει το σωματίδιο το στόχο ακολουθώντας τη μικρότερη διαδρομή, πρέπει να εκτοξευθεί στην κατεύθυνση του ημιάξονα

- α. Ox β. Oy γ. Ox' .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



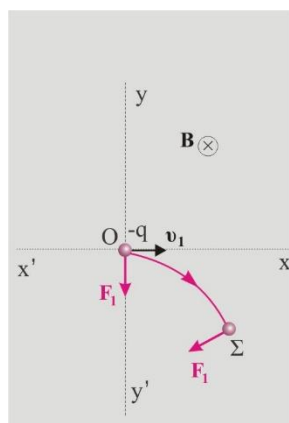
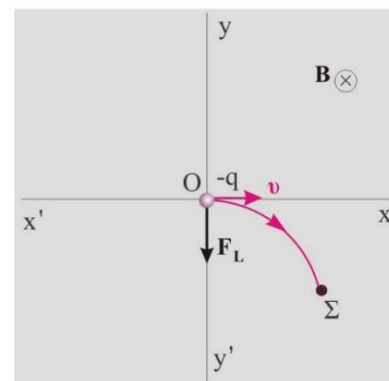
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

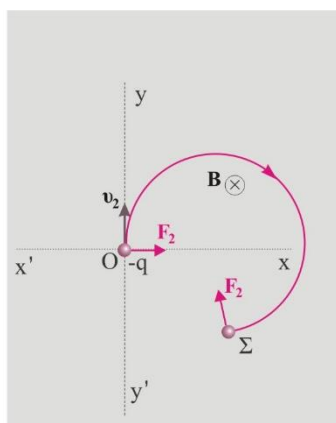
Το φορτισμένο σωματίδιο εκτοξεύεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, άρα εκτελεί κυκλική τροχιά πάνω στην οποία θέλουμε να βρίσκονται τα σημεία O και Σ.

Η δύναμη Laplace είναι κάθετη στην κυκλική τροχιά, την σχεδιάζουμε στα σημεία O και Σ.

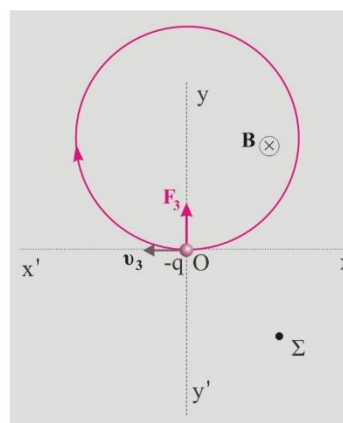
Εφαρμόζοντας τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι αν το αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο εκτοξευθεί στην κατεύθυνση του ημιάξονα:



σχήμα (α)



σχήμα (β)



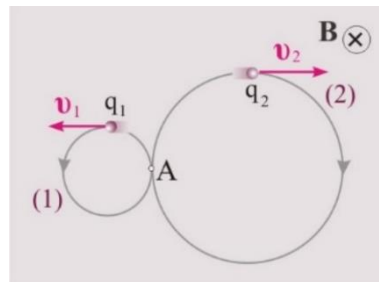
σχήμα (γ)

- Ox , θα εκτελέσει την τροχιά του σχήματος α.
- Oy , θα εκτελέσει την τροχιά του σχήματος β.
- Ox' , θα εκτελέσει την τροχιά του σχήματος γ και δεν θα περάσει από το Σ.

Επιπλέον, θέλουμε το τόξο ΟΣ να είναι το μικρότερο δυνατό, άρα η φορά διαγραφής του τόξου πρέπει να είναι όπως δείχνεται στο σχήμα (α).

Ερώτηση 19.

Δύο φορτισμένα σωματίδια (1), (2) με φορτία $q_1 > 0$, $q_2 < 0$, όπου $|q_1| = |q_2|$ κινούνται σε κυκλικές τροχιές σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B , όπως δείχνεται στο σχήμα. Τα σωματίδια εκτοξεύτηκαν ταυτόχρονα από το σημείο Α. Όταν το σωματίδιο (1) περνά από το σημείο Α μια φορά, το σωματίδιο (2) περνά από το ίδιο σημείο τρεις φορές.



Τα φορτισμένα σωματίδια έχουν λόγο μαζών, $\frac{m_1}{m_2}$, ίσο με

α. 1.

β. 2.

γ. 3.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

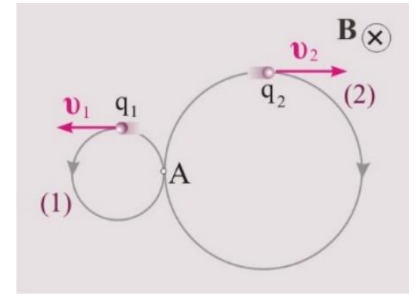
Όταν το σωματίδιο (1) περνά από το σημείο Α μια φορά, το σωματίδιο (2) περνά από το ίδιο σημείο τρεις φορές, επομένως $T_1 = 3T_2$.

Από τη σχέση της περιόδου έχουμε

$$T_1 = 3T_2 \Rightarrow \frac{2\pi m_1}{|q_1|B} = 3 \frac{2\pi m_2}{|q_2|B} \Rightarrow m_1 = 3m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$$

Ερώτηση 20.

Δύο φορτισμένα σωματίδια (1), (2) με φορτία $q_1 > 0$, $q_2 < 0$, όπου $|q_1| = |q_2|$ κινούνται σε κυκλικές τροχιές σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B , όπως δείχνεται στο σχήμα. Τα σωματίδια εκτοξεύτηκαν ταυτόχρονα από το σημείο Α. Η ακτίνα της τροχιάς του σωματιδίου με φορτίο q_2 είναι τριπλάσια αυτής του σωματιδίου με φορτίο q_1 . Επίσης, όταν το σωματίδιο (1) περνά από το σημείο Α μια φορά, το σωματίδιο (2) περνά από το ίδιο σημείο για ένατη φορά.



Τα μέτρα των ταχυτήτων των φορτισμένων σωματιδίων έχουν

λόγο, $\frac{v_1}{v_2}$, ίσο με

α. $\frac{1}{3}$.

β. $\frac{1}{27}$.

γ. $\frac{2}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Όταν το σωματίδιο (1) περνά από το σημείο Α μια φορά, το σωματίδιο (2) περνά από το ίδιο σημείο εννέα φορές, επομένως $T_1 = 9T_2$. Από τη σχέση της περιόδου έχουμε

$$T_1 = 9T_2 \Rightarrow \frac{2\pi m_1}{|q_1|B} = 9 \frac{2\pi m_2}{|q_2|B} \Rightarrow m_1 = 9m_2, \quad (1)$$

Η ακτίνα της τροχιάς του σωματιδίου με φορτίο q_2 είναι τριπλάσια αυτής του σωματιδίου με φορτίο q_1 . Επομένως

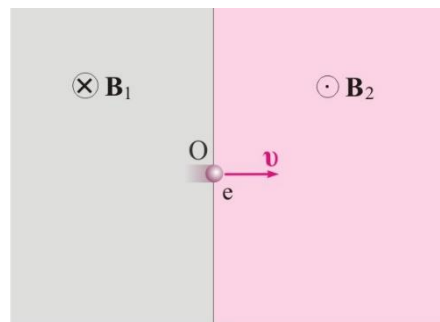
$$R_2 = 3R_1 \Rightarrow \frac{m_2 v_2}{|q_2|B} = 3 \frac{m_1 v_1}{|q_1|B} \xrightarrow{(1)} \frac{m_2 v_2}{|q_2|B} = 3 \frac{9m_2 v_1}{|q_1|B} \Rightarrow v_2 = 27v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{27}$$

Ερώτηση 21.

Μια δέσμη ηλεκτρονίων εκτοξεύεται με ταχύτητα u κάθετα στις δυναμικές γραμμές των δύο ομογενών μαγνητικών πεδίων του σχήματος. Το σημείο εκτόξευσης O βρίσκεται στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο πεδίων. Τα μέτρα των εντάσεων των δύο πεδίων είναι B_1 και B_2 , όπου $B_1 > B_2$.

Να σχεδιαστεί ποιοτικά η τροχιά που θα εκτελέσει το ηλεκτρόνιο.

Να δικαιολογήσετε τον σχεδιασμό.



Λύση

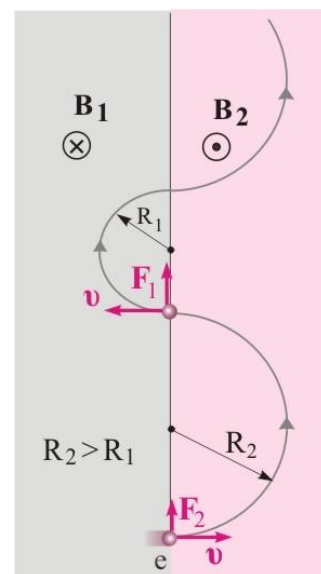
Τα σωματίδια αφού διαγράψουν στο περιοχή του πεδίου B_2 ημικύκλιο ακτίνας R_2 εισέρχονται στην περιοχή του B_1 , το οποίο έχει αντίθετη φορά από το B_2 , έτσι η φορά της δύναμης Lorentz αντιστρέφεται.

Από την σχέση

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

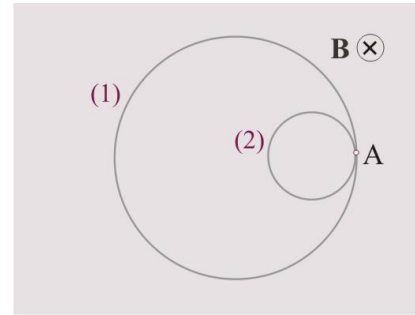
προκύπτει ότι τα σωματίδια διαγράφουν κυκλική τροχιά μεγαλύτερης ακτίνας στην περιοχή του πεδίου B_2 καθώς η ακτίνα της τροχιάς είναι αντιστρόφως ανάλογη της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

Η τροχιά των ηλεκτρονίων δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Ερώτηση 22.

Ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο κινούνται με ταχύτητες ίδιου μέτρου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B , κάθετα στις δυναμικές γραμμές του, διαγράφοντας κυκλικές τροχιές. Οι τροχιές εφάπτονται στο σημείο A , όπως δείχνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι η μάζα του πρωτονίου είναι 1836 φορές μεγαλύτερη από αυτήν του ηλεκτρονίου.



α. Η τροχιά (1) αντιστοιχεί στο ηλεκτρόνιο και η τροχιά (2) στο πρωτόνιο.

β. Αν τα φορτία ξεκινήσουν ταυτόχρονα από το σημείο A , θα ξαναβρεθούν στο ίδιο σημείο την ίδια χρονική στιγμή.

γ. Στο χρονικό διάστημα που το πρωτόνιο εκτελεί μια περιφορά, το ηλεκτρόνιο εκτελεί 1836 περιφορές.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς για κάθε σωματίδιο δίνεται από τη σχέση

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

Τα δύο σωματίδια έχουν ίδιες ταχύτητες και ίδια φορτία, επομένως η ακτίνα της τροχιάς κάθε σωματιδίου είναι ανάλογη της μάζας του. Άρα, η τροχιά (1) αντιστοιχεί στο πρωτόνιο.

Η περίοδος του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου είναι

$$T_p = \frac{2\pi m_p}{|q_p|B}, \quad T_e = \frac{2\pi m_e}{|q_e|B} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Ισχύει $|q_p| = |q_e|$ και $m_p = 1836m_e$. Επομένως

$$\frac{T_p}{T_e} = \frac{\frac{2\pi m_p}{|q_p|B}}{\frac{2\pi m_e}{|q_e|B}} = \frac{m_p}{m_e} = 1836$$

Στο χρονικό διάστημα που το πρωτόνιο εκτελεί μια περιφορά, το ηλεκτρόνιο έχει εκτελέσει 1836 περιφορές.

Ερώτηση 23.

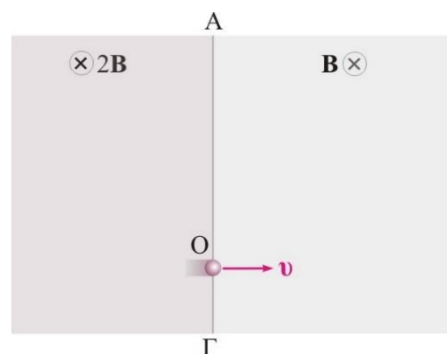
Τα δύο μαγνητικά πεδία του σχήματος έχουν εντάσεις B και $2B$ αντίστοιχα. Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο εκτοξεύεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές των πεδίων από το σημείο O και κάθετα στην $ΑΓ$ που διαχωρίζει τα πεδία, όπως δείχνεται στο σχήμα.

Η κίνηση του σωματιδίου είναι περιοδική με περίοδο

α. $T = \frac{\pi m}{|q|B}$.

β. $T = \frac{2\pi m}{|q|B}$.

γ. $T = \frac{3\pi m}{2|q|B}$.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

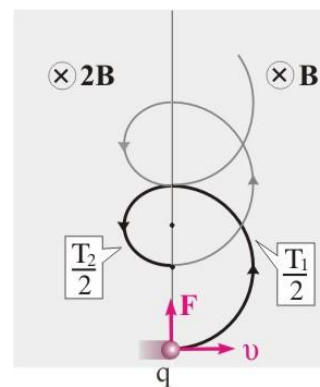
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Στο μαγνητικό πεδίο έντασης B το θετικά φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί ημικυκλική τροχιά ακτίνας R_1 και στο μαγνητικό πεδίο έντασης $2B$ εκτελεί ημικυκλική τροχιά ακτίνας R_2

$$R = \frac{mv}{|q|B} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2}$$

Η περίοδος της κίνησης του σωματιδίου είναι

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi m}{qB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi m}{q2B} \Rightarrow T = \frac{3\pi m}{2qB}$$



Ερώτηση 24.

Ένα πρωτόνιο, p και ένα δευτερόνιο, Δ , επιταχύνονται από διαφορά δυναμικού V . Στη συνέχεια τα σωματίδια εισέρχονται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B , με διεύθυνση κάθετη στις δυναμικές γραμμές του. Τα φορτία των σωματιδίων συνδέονται με τη σχέση $q_{\Delta}=q_p$ και οι μάζες των σωματιδίων με τη σχέση $m_{\Delta}=2m_p$.

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του δευτερονίου, R_{Δ} και η ακτίνα της τροχιάς του πρωτονίου, R_p συνδέονται με τη σχέση

α. $R_{\Delta} = R_p$.

β. $R_{\Delta} = R_p \sqrt{3}$.

γ. $R_{\Delta} = R_p \sqrt{2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Κάθε φορτισμένο σωματίδιο που επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού V αποκτά ταχύτητα μέτρου u , για την οποία σύμφωνα με το ΘΜΚΕ ισχύει:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV, \quad (1)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει κάθε σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$R = \frac{mv}{qB}, \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε:

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

Γράφοντας την τελευταία σχέση για τα δύο σωματίδια παίρνουμε:

$$R_p = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 \cdot m_p V}{q_p}}$$

$$R_{\Delta} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 \cdot 2m_p V}{q_p}}, \quad \text{Άρα } R_{\Delta} = R_p \sqrt{2}$$

Ερώτηση 25.

Ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα που σχηματίζει γωνία φ με τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές του πεδίου. Αν το σωματίδιο εισέλθει με ταχύτητα διπλάσιου μέτρου και με την ίδια γωνία στο πεδίο, το βήμα της έλικας θα

α. παραμείνει το ίδιο.

β. διπλασιαστεί.

γ. τετραπλασιαστεί.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

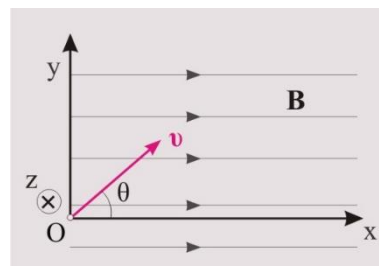
Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα που σχηματίζει γωνία φ με τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές του πεδίου εκτελεί ελικοειδή τροχιά στην οποία το βήμα της έλικας δίνεται από τη σχέση

$$\beta = v_{||} \cdot \frac{2\pi m}{|q|B} \Rightarrow \beta = v \sin \varphi \cdot \frac{2\pi m}{|q|B}$$

Αν η ταχύτητα εισόδου διπλασιαστεί, θα διπλασιαστεί και το βήμα.

Ερώτηση 26.

Ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου u από το σημείο O και σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τις δυναμικές γραμμές οριζόντιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B , όπως δείχνεται στο σχήμα.



α. Το σωματίδιο διαγράφει ελικοειδή κίνηση, ομαλή κυκλική παράλληλα στο επίπεδο yOz και ταυτόχρονα ευθύγραμμη ομαλή κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x .

β. Το σωματίδιο εκτελεί ελικοειδή κίνηση της οποίας η περίοδος εξαρτάται από τη γωνία θ .

γ. Το σωματίδιο διαγράφει ελικοειδή κίνηση, ομαλή κυκλική παράλληλα στο επίπεδο yOx και ταυτόχρονα ευθύγραμμη ομαλή κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z .
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ταχύτητα αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες, την $u_{||} = u \sin \theta$ που είναι παράλληλη στο B και την

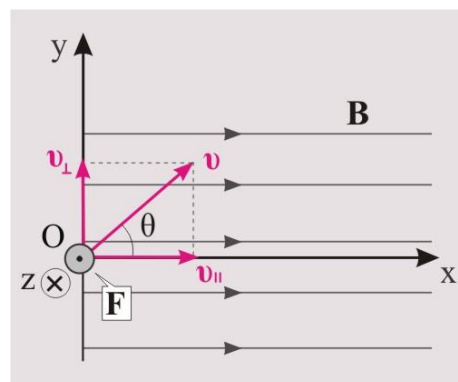
$u_{\perp} = u \cos \theta$ που είναι κάθετη.

Για τη μελέτη της κίνησης θα εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας.

Το σωματίδιο λόγω της συνιστώσας $u_{||}$ δεν δέχεται μαγνητική δύναμη, οπότε εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά μήκος του άξονα των x .

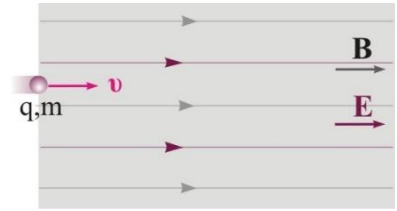
Το σωματίδιο λόγω της συνιστώσας $u_{\perp}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, καθώς δέχεται τη μαγνητική δύναμη η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα B και η ταχύτητα $u_{\perp}$.

Σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού η δύναμη Lorentz έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, δηλαδή βρίσκεται πάνω στον άξονα των z . Άρα, η κυκλική τροχιά γίνεται παράλληλα στο επίπεδο που ορίζεται από τους άξονες yOz .



Ερώτηση 27.

Στο χώρο του διπλανού σχήματος συνυπάρχουν ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B με τις δυναμικές γραμμές τους ομόρροπες. Μια δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές των πεδίων, όπως δείχνεται στο σχήμα. Ένα ηλεκτρόνιο της δέσμης θα κινηθεί



- α. ομαλά επιβραδυνόμενο.
- β. ομαλά επιταχυνόμενο.
- γ. σε ελικοειδή τροχιά με αυξανόμενο βήμα έλικας.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

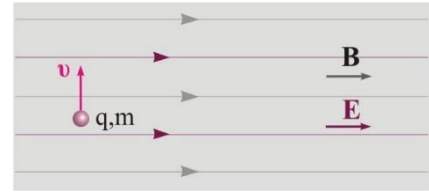
Σωστή απάντηση είναι η α.

Το ηλεκτρόνιο κινείται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, οπότε δεν ασκείται σε αυτό μαγνητική δύναμη.

Στο ηλεκτρόνιο ασκείται, λόγω του ηλεκτρικού πεδίου, ηλεκτρική δύναμη $F_{\eta\lambda}$ η οποία είναι αντίρροπη της έντασης E του ηλεκτρικού πεδίου, με αποτέλεσμα αυτό να επιβραδύνεται ομαλά.

Ερώτηση 28.

Στο χώρο του διπλανού σχήματος συνυπάρχουν ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B με τις δυναμικές γραμμές τους ομόρροπες. Ένα πρωτόνιο εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές των πεδίων όπως δείχνεται στο σχήμα. Το πρωτόνιο



- α. θα κινηθεί ομαλά επιταχυνόμενο.
- β. θα διαγράψει έλικα σταθερού βήματος.
- γ. θα διαγράψει έλικα με βήμα μεταβλητού μήκους.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

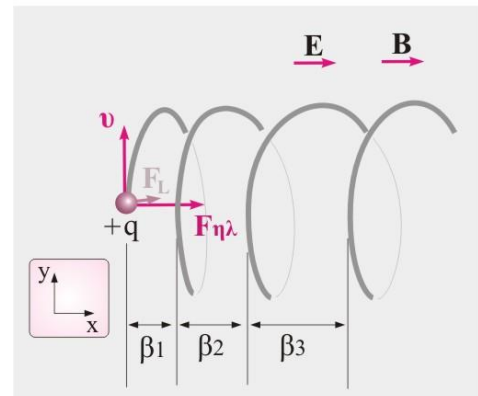
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Στο πρωτόνιο ασκείται η δύναμη $F_{\eta\lambda}$ από το ηλεκτρικό πεδίο η οποία έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτό έχει ως συνέπεια το πρωτόνιο στον άξονα x να επιταχύνεται ομαλά.

Η δύναμη Lorentz που ασκείται στο πρωτόνιο, λόγω του μαγνητικού πεδίου, το κάνει να εκτελεί στο επίπεδο yOz κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας.

Η δύναμη Lorentz στο σχήμα είναι σχεδιασμένη κάθετα στο επίπεδο xOy , δηλαδή βρίσκεται πάνω στο επίπεδο yOz και έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η κίνηση του πρωτονίου είναι ελικοειδής με βήμα έλικας αυξανόμενου μέτρου.

Ερώτηση 29.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι άκαμπτοι ρευματοφόροι αγωγοί, που διαρρέονται από ομόρροπα και σταθερής έντασης ρεύματα I_1 και I_2 . Οι αγωγοί απέχουν μεταξύ τους x και ισορροπούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με τον πάνω αγωγό να είναι τοποθετημένος σε ακλόνητα στηρίγματα, ενώ ο κάτω αιωρείται.



Αν με ρ συμβολίσουμε την πυκνότητα του κάτω αγωγού και S το εμβαδό διατομής του, τότε η απόσταση x είναι

α. $x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{\rho S g}$.

β. $x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 I_1 I_2}{\rho S g}$.

γ. $x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{2 \rho S g}$.

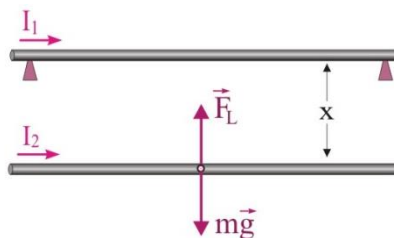
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Οι παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, άρα αναπτύσσονται μεταξύ τους ελκτικές δυνάμεις.

Σε μήκος αγωγού ΔL που διαρρέεται από ένταση ρεύματος I_2 , ασκείται ελκτική δύναμη $\vec{F}_L$ από τον αγωγό ρεύματος I_1 , που ισούται με το βάρος του αγωγού που αντιστοιχεί στο μήκος ΔL , άρα



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = \Delta m g \Rightarrow B_1 I_2 \Delta L = \rho \Delta V g$$

Παίρνοντας υπόψη ότι: $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 I_1}{x}$, $\Delta V = S \cdot \Delta L$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 I_1}{x} I_2 \Delta L = \rho S \Delta L g \Rightarrow x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 I_1 I_2}{\rho S g}.$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 30.

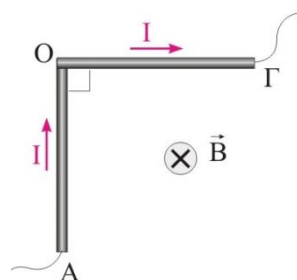
Ρευματοφόρος αγωγός ΑΟΓ, με $AO=OG=a$ και $AO \perp OG$, βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στο επίπεδο του αγωγού. Η δύναμη που δέχεται ο αγωγός ΑΟΓ από το μαγνητικό πεδίο έχει μέτρο

α. $F_L = BIa$.

β. $F_L = \sqrt{2}BIa$.

γ. $F_L = 2BIa$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

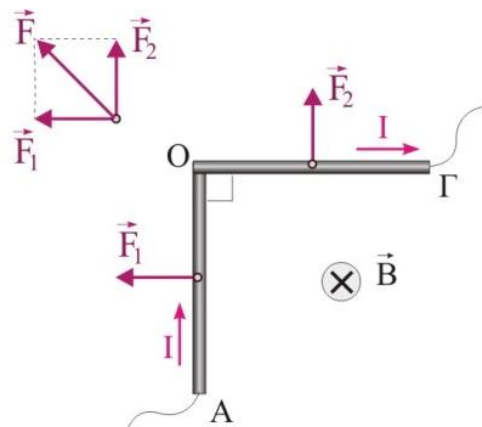
Κάνοντας χρήση του κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε τις φορές των δυνάμεων Laplace που ασκούνται στους δύο επιμέρους αγωγούς.

Τα μέτρα των δύο δυνάμεων είναι $F_1 = F_2 = BIa$ και οι φορείς τους σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90° .

Το μέτρο της συνολικής δύναμης Laplace είναι ίσο με

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow F = \sqrt{2}BIa.$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.



Ερώτηση 31.

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός $ΑΓ=2α$, βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$, που είναι κάθετο σε αυτόν. Η δύναμη που δέχεται ο αγωγός $ΑΓ$ από το μαγνητικό πεδίο έχει μέτρο F . Κάμπτουμε τον αγωγό στο μέσο του, O , έτσι ώστε να είναι $AO=OG=α$, $AO \perp OG$ και το επίπεδό του $ΑΟΓ$ να είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Η συνολική δύναμη F' που δέχεται από το μαγνητικό πεδίο ο νέος αγωγός $ΑΟΓ$ έχει μέτρο

α. $F' = \frac{\sqrt{2}}{2} F$.

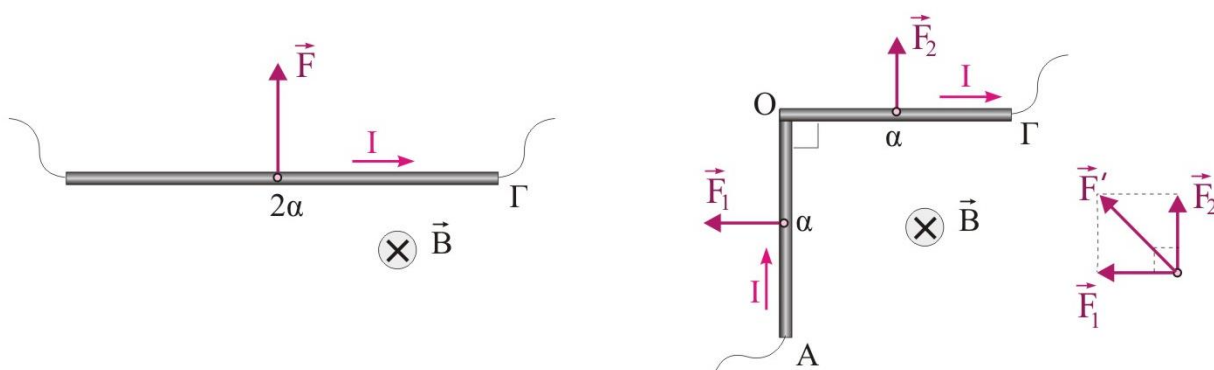
β. $F' = \sqrt{2} F$.

γ. $F' = F$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η α.



Αρχικά ασκείται στον αγωγό δύναμη Laplace με μέτρο $F = BI2α$. (1)

Όταν ο αγωγός καμφθεί, δημιουργούνται δύο ευθύγραμμοι αγωγοί μήκους $α$, που ο καθένας δέχεται δύναμη με μέτρο $F_1 = F_2 = BIα$. Οι φορείς των δύο δυνάμεων σχηματίζουν ορθή γωνία, οπότε η συνολική δύναμη F' που δέχεται τώρα ο αγωγός $ΑΟΓ$ έχει μέτρο $F' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{2} BIα$.

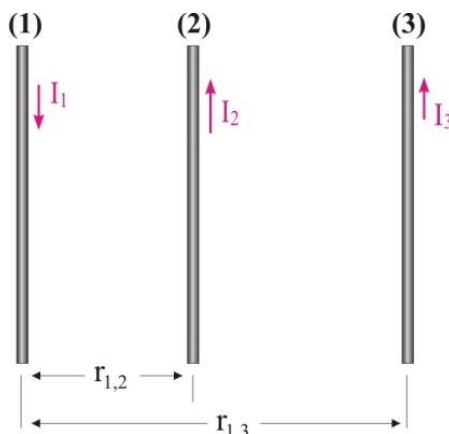
Η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της (1) δίνει: $F' = \frac{\sqrt{2}}{2} F$.

Άρα, σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 32.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο τρεις παράλληλοι άκαμπτοι ομοεπίπεδοι ρευματοφόροι αγωγοί πολύ μεγάλου μήκους, με αντίρροπα τα ρεύματα I_1 και I_2 και ομόρροπα τα I_2 , I_3 . Δύο αγωγοί είναι ακλόνητοι, ενώ ο τρίτος, παρότι είναι ελεύθερος, παραμένει επίσης ακίνητος.

Ο αγωγός που παραμένει ακίνητος παρότι είναι ελεύθερος είναι ο



α. (2), όταν ισχύει $\frac{r_{1,2}}{r_{1,3}} = 1 - \frac{I_2}{I_3}$.

β. (3), όταν ισχύει $\frac{r_{1,2}}{r_{1,3}} = 1 - \frac{I_1}{I_3}$.

γ. (3), όταν ισχύει $\frac{r_{1,2}}{r_{1,3}} = 1 - \frac{I_2}{I_1}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

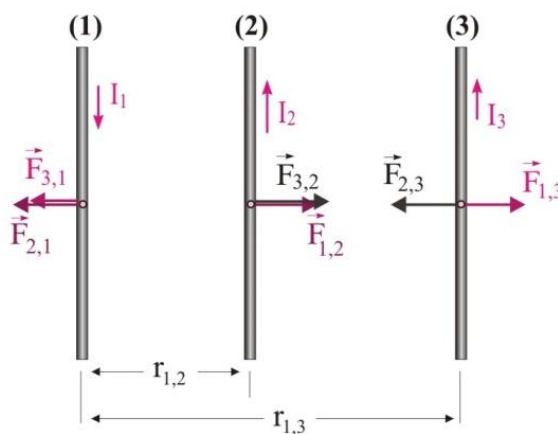
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των αγωγών.

Οι αγωγοί (1) και (2) διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, άρα απωθούνται μεταξύ τους (δυνάμεις $\vec{F}_{1,2}$ και $\vec{F}_{2,1}$).

Οι αγωγοί (2) και (3) διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, άρα έλκονται μεταξύ τους (δυνάμεις $\vec{F}_{2,3}$ και $\vec{F}_{3,2}$).

Επίσης, οι αγωγοί (1) και (3) διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, άρα απωθούνται μεταξύ τους (δυνάμεις $\vec{F}_{1,3}$ και $\vec{F}_{3,1}$).



Από το σχεδιασμό των δυνάμεων προκύπτει ότι ο μόνος αγωγός στον οποίο οι ασκούμενες δυνάμεις έχουν αντίθετες κατευθύνσεις είναι ο (3).

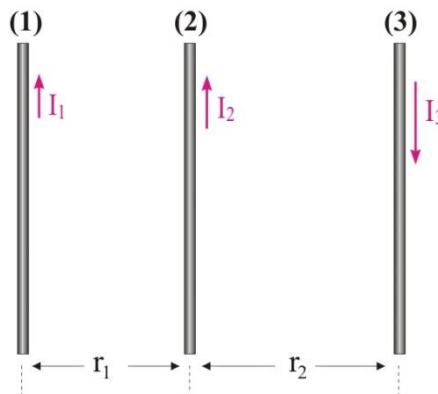
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{1,3} = F_{2,3} \Rightarrow \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_3 \Delta L}{r_{1,3}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I_2 I_3 \Delta L}{r_{1,3} - r_{1,2}}$$

$$\frac{r_{1,3} - r_{1,2}}{r_{1,3}} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \frac{r_{1,2}}{r_{1,3}} = 1 - \frac{I_2}{I_1}$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 33.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο τρεις ευθύγραμμοι παράλληλοι άκαμπτοι ομοεπίπεδοι ρευματοφόροι αγωγοί πολύ μεγάλου μήκους, με ομόρροπα ρεύματα τα I_1 , I_2 και αντίρροπό τους το I_3 . Οι εντάσεις των ρευμάτων συνδέονται με τη σχέση $I_1 = I_2 = I$ και $I_3 = 2I$. Οι δύο από τους τρεις αγωγούς αγωγοί είναι ακλόνητοι, ενώ ο τρίτος παρότι είναι ελεύθερος, παραμένει επίσης ακίνητος.



Ο αγωγός που είναι ελεύθερος είναι ο

α. (1) και ισχύει η σχέση $r_2 = 2r_1$.

β. (1) και ισχύει η σχέση $r_2 = r_1$.

γ. (2) και ισχύει η σχέση $r_2 = r_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των αγωγών.

Οι αγωγοί (1) και (2) διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, άρα σε μήκος d των αγωγών αναπτύσσεται ελκτική δύναμη

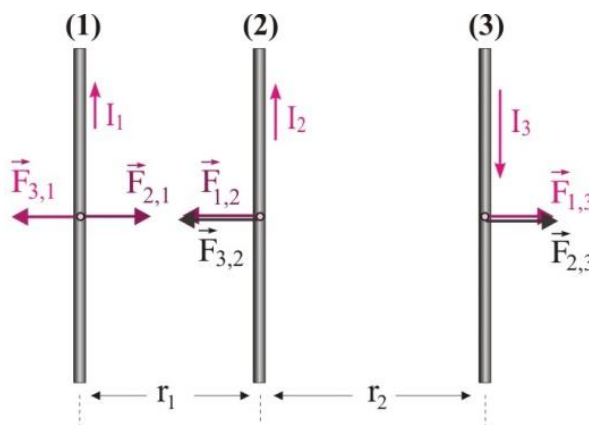
$$\text{μέτρου } F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2 d}{r_1}.$$

Οι αγωγοί (2) και (3) διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, άρα σε μήκος d των

$$\text{αγωγών αναπτύσσεται απωστική δύναμη μέτρου } F_{2,3} = F_{3,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4I^2 d}{r_2}.$$

Επίσης, οι αγωγοί (1) και (3) διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα άρα σε μήκος d των αγωγών αναπτύσσεται απωστική δύναμη μέτρου $F_{1,3} = F_{3,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4I^2 d}{r_1 + r_2}$.

Από το σχεδιασμό των δυνάμεων προκύπτει ότι μόνο ο αγωγός (1) θα μπορούσε να ισορροπεί, αρκεί οι ασκούμενες δυνάμεις να έχουν ίσα μέτρα.



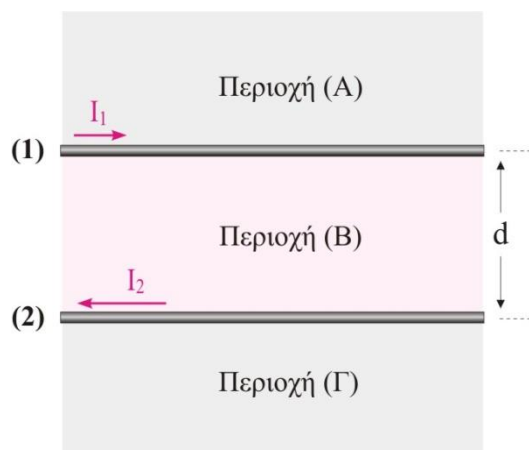
$$F_{2,1} = F_{3,1} \Rightarrow \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I^2 d}{r_1} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{4I^2 d}{r_1 + r_2} \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{2}{r_1 + r_2} \Rightarrow r_1 = r_2$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 34.

Στο σχήμα απεικονίζονται δύο ευθύγραμμοι παράλληλοι άκαμπτοι ρευματοφόροι αγωγοί, με αντίρροπα και σταθερής έντασης ρεύματα I_1 και $I_2 = 2I_1$, που τους κρατάμε σε απόσταση d στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο.

Τρίτος ευθύγραμμος αγωγός παράλληλος προς τους άλλους δύο που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_3 , άγνωστης φοράς, πρόκειται να τοποθετηθεί στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο, προκειμένου να ισορροπεί από τις δυνάμεις που θα δεχθεί από τους άλλους δύο. Ο αγωγός πρέπει να τοποθετηθεί



α. στην περιοχή (A) και σε απόσταση $x = \frac{d}{3}$ από τον αγωγό I_1 .

β. στην περιοχή (B) και σε απόσταση $x = \frac{d}{3}$ από τον αγωγό I_1 .

γ. στην περιοχή (A) και σε απόσταση $x = d$ από τον αγωγό I_1 .

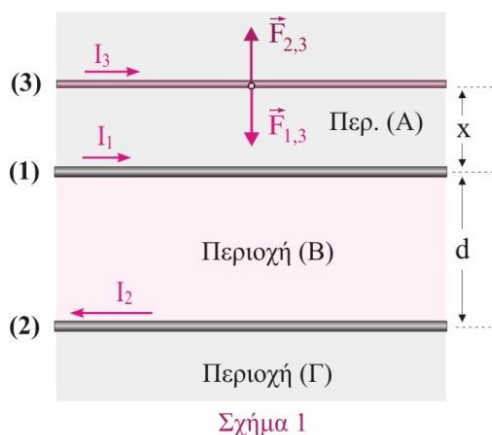
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

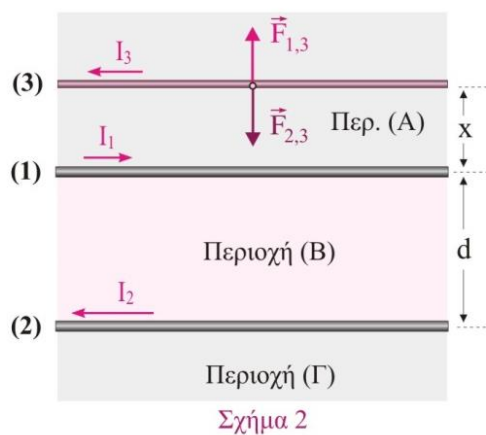
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Θα βρούμε πρώτα την περιοχή στην οποία θα μπορούσε να τοποθετηθεί αγωγός ρεύματος I_3 .

Έστω, ότι ο αγωγός ρεύματος I_3 τοποθετείται στην περιοχή (A).



Σχήμα 1



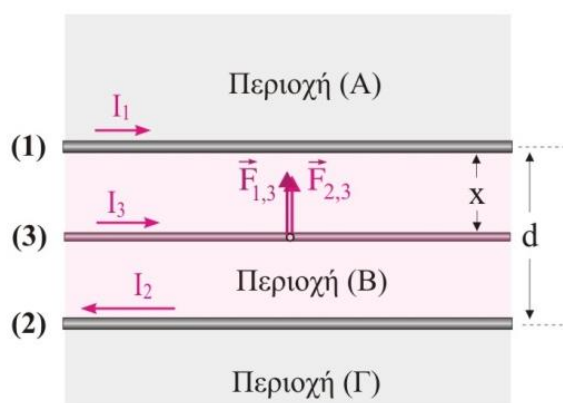
Σχήμα 2

Αν τα ρεύματα I_1 , I_3 ήταν ομόρροπα, οι δυνάμεις $\vec{F}_{1,3}$, $\vec{F}_{2,3}$ θα ήταν αντίρροπες, όπως φαίνεται στο σχήμα 1 και θα μπορούσε να ισορροπεί ο αγωγός I_3 .

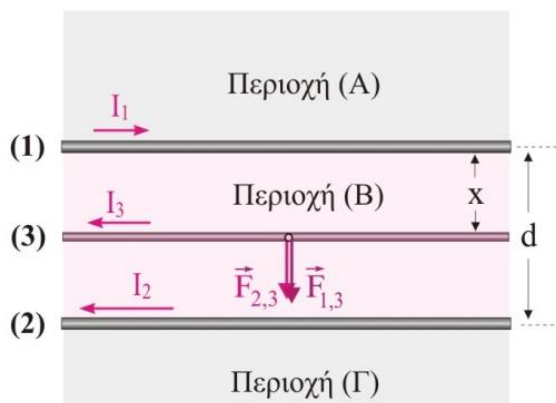
Αν τα ρεύματα I_1 , I_3 ήταν αντίρροπα, οι δυνάμεις $\vec{F}_{1,3}$, $\vec{F}_{2,3}$ θα ήταν πάλι αντίρροπες, όπως φαίνεται στο σχήμα 2 και θα μπορούσε να ισορροπεί ο αγωγός I_3 .

Άρα, στην περιοχή (Α) θα μπορούσε να τοποθετηθεί ο αγωγός.

Έστω, ότι ο αγωγός ρεύματος I_3 τοποθετείται στην περιοχή (Β).



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Όποια και να είναι η φορά του I_3 οι δυνάμεις $\vec{F}_{1,3}$, $\vec{F}_{2,3}$, που δέχεται ο αγωγός I_3 από τους αγωγούς ρευμάτων I_1 και I_2 είναι ομόρροπες, (βλέπε σχήματα 3,4), οπότε δεν θα μπορούσε να ισορροπήσει ο αγωγός I_3 .

Στην περιοχή (Γ) δεν θα μπορούσε να τοποθετηθεί ο αγωγός I_3 , γιατί η δύναμη $\vec{F}_{2,3}$ θα είχε μεγαλύτερο μέτρο από την $\vec{F}_{1,3}$ κι έτσι δεν θα μπορούσε να ισορροπήσει.

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{1,3} = F_{2,3} \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_3 \Delta l}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2 I_3 \Delta l}{d+x} \Rightarrow$$

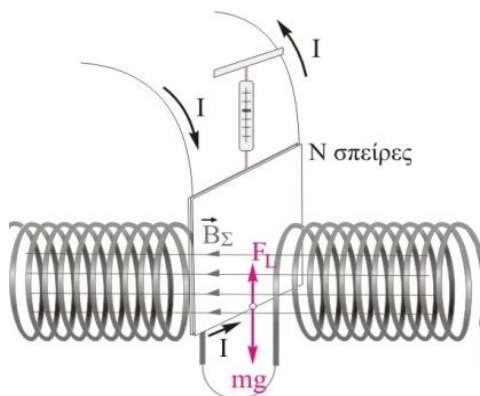
$$\frac{I_1}{x} = \frac{2I_1}{d+x} \Rightarrow x = d.$$

Άρα, για να ισορροπεί ο αγωγός πρέπει να τοποθετηθεί στην περιοχή (Α) και σε απόσταση $x = d$ από τον αγωγό I_1 .

Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 35.

Ορθογώνιο κατακόρυφο πλαίσιο με N σπείρες, εξαρτάται από δυναμόμετρο και τοποθετείται στο μέσο ενός ρευματοφόρου σωληνοειδούς με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές, έτσι ώστε η κάτω οριζόντια πλευρά του, μήκους ℓ να βρίσκεται εντός του σωληνοειδούς. Αν διοχετεύσουμε ρεύμα έντασης I στο πλαίσιο, η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι το ήμισυ του βάρους του πλαισίου. Προκειμένου η ένδειξη του δυναμόμετρου να μηδενισθεί, πρέπει να



α. υποδιπλασιάσουμε την ένταση του ρεύματος στο σωληνοειδές.

β. διπλασιάσουμε τις εντάσεις των ρευμάτων στο πλαίσιο και στο σωληνοειδές.

γ. διπλασιάσουμε την ένταση του ρεύματος στο πλαίσιο.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

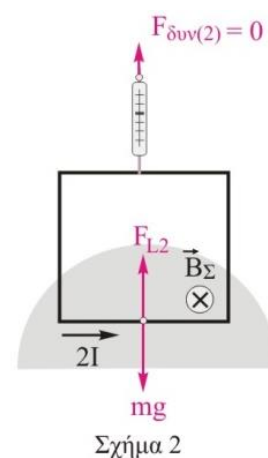
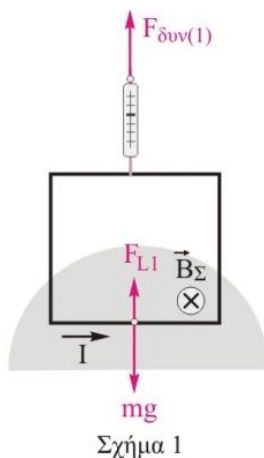
Η αρχική συνθήκη ισορροπίας του πλαισίου (Σχήμα 1) δίνει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\delta\upsilon\nu(1)} + F_{L(1)} - mg = 0 \Rightarrow$$

$$F_{L(1)} = \frac{mg}{2}$$

(1)

Η νέα συνθήκη ισορροπίας του πλαισίου (Σχήμα 2) δίνει:



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\delta\upsilon\nu(2)} + F_{L(2)} - mg = 0 \xrightarrow{F_{\delta\upsilon\nu(2)}=0} F_{L(2)} = mg \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι για να μηδενιστεί η ένδειξη του δυναμόμετρου πρέπει να διπλασιαστεί το μέτρο της δύναμης Laplace.

Όμως $F_L = N \cdot B \ell$

Από τις προτεινόμενες απαντήσεις:

η α. οδηγεί σε υποδιπλασιασμό του B , άρα προκαλεί υποδιπλασιασμό του μέτρου της δύναμης Laplace.

η β. οδηγεί σε διπλασιασμό του B και διπλασιασμό του I , άρα προκαλεί τετραπλασιασμό του μέτρου της δύναμης Laplace.

η γ. οδηγεί σε διπλασιασμό του μέτρου της δύναμης Laplace και είναι η σωστή απάντηση.

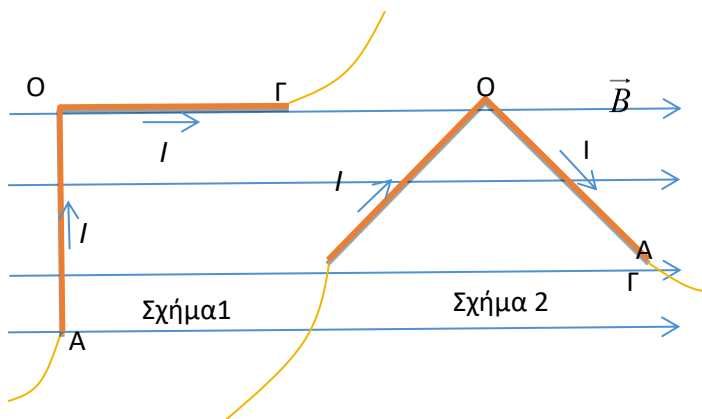
Άρα, σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 36.

Ο άκαμπτος αγωγός ΑΟΓ, σχήματος ισοσκελούς κεφαλαίου γράμματος Γ

($AO = OG = \ell$, $AO \perp OG$),

διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και είναι τοποθετημένος με το επίπεδό του κατακόρυφο και παράλληλο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς οριζόντιου μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$.



Όταν η πλευρά ΑΟ είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές (Σχήμα 1), τότε δέχεται δύναμη μέτρου F από το πεδίο. Στρέφουμε τον αγωγό κατά 45° και γύρω από το σημείο Ο, έτσι ώστε το επίπεδό του να παραμείνει παράλληλο με τις δυναμικές γραμμές (Σχήμα 2).

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται τώρα ο αγωγός ΑΟΓ έχει μέτρο

α. $\Sigma F = F$

β. $\Sigma F = 2F$

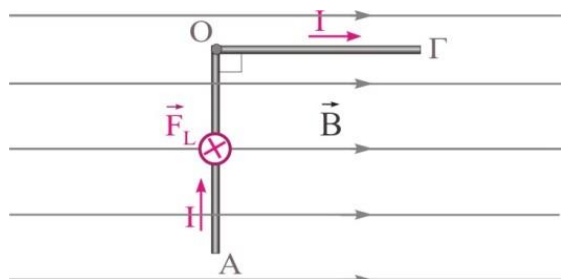
γ. $\Sigma F = 0$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

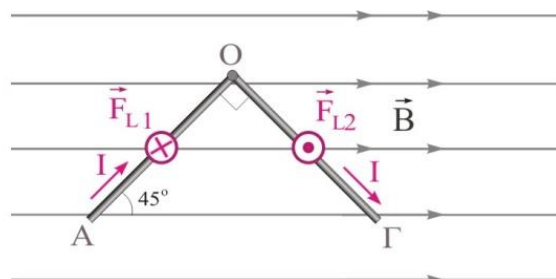
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Όπως δείχνεται στο σχήμα 1 η πλευρά ΑΟ δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο που έχει μέτρο ίσο με $F_L = BI\ell$ και φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα. Η πλευρά ΟΓ δεν δέχεται δύναμη, επειδή είναι παράλληλη με τις δυναμικές γραμμές.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Όπως δείχνεται στο σχήμα 2 η πλευρά ΑΟ σχηματίζει γωνία 45° με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, οπότε δέχεται δύναμη Laplace με φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα, που έχει μέτρο

$$F_{L1} = BI\ell\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} B\ell.$$

Η πλευρά ΟΓ, επίσης σχηματίζει γωνία 45° με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, οπότε δέχεται δύναμη Laplace με φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη (αντίθετη της δύναμης F_{L1}), που έχει μέτρο

$$F_{L2} = BI\ell\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} B\ell.$$

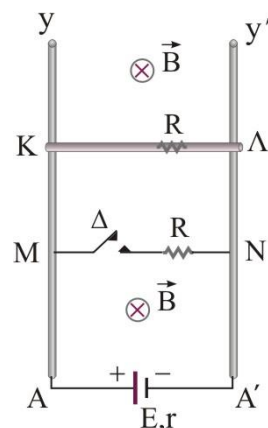
Άρα, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον αγωγό ΑΟΓ είναι ίση με μηδέν.

Άρα, σωστή απάντηση η γ.

(Σχόλιο: οι δυνάμεις $\vec{F}_{L1}, \vec{F}_{L2}$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων του οποίου η ροπή του τείνει να περιστρέψει τον αγωγό).

Ερώτηση 37.

Οι κατακόρυφοι παράλληλοι αγωγοί Ay, A'y' συνδέονται στα άκρα A και A' με ηλεκτρική πηγή Η.Ε.Δ. (E) και εσωτερικής αντίστασης r. Ο αγωγός ΚΛ που έχει αντίσταση R, μάζα m και μήκος l, εφάπτεται στους Ay, A'y', μπορεί να κινείται χωρίς τριβές μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στο επίπεδο των αγωγών Ay, A'y'. Ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί.



Κλείνουμε το διακόπτη Δ. Θεωρούμε ότι όταν κλείνει ο διακόπτης Δ, η δύναμη που δέχεται ο αγωγός ΚΛ εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου του MN είναι αμελητέα. Ο αγωγός ΚΛ θα

α. εξακολουθήσει να ισορροπεί.

β. κινηθεί προς τα κάτω.

γ. κινηθεί προς τα πάνω.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

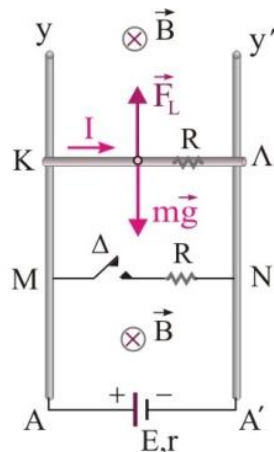
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Το πώς θα κινηθεί η ράβδος μετά το κλείσιμο του διακόπτη εξαρτάται από το μέτρο της νέας δύναμης Laplace, δηλαδή τη νέα τιμή του ρεύματος που διαρρέει το αγωγό ΚΛ.

Διακόπτης Δ ανοικτός:

Αρχικά, η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι $R_{ολ} = r + R$ και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό είναι, σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα, $I = \frac{E}{r + R}$



Ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί λόγω του βάρους του και της δύναμης Laplace, άρα

$$F_L = mg \quad \text{με} \quad F_L = B \frac{E}{r + R} l \quad (1)$$

Διακόπτης Δ κλειστός:

Όταν κλείσει ο διακόπτης Δ, τότε η ολική αντίσταση γίνεται:

$$R_{ολ.} = r + \frac{R \cdot R}{R + R} = r + \frac{R}{2} \quad \text{και το ρεύμα που διαρρέει την πηγή E θα είναι: } I_{ολ.} = \frac{E}{R_{ολ.}} = \frac{E}{r + \frac{R}{2}}$$

Το ρεύμα που διαρρέει το αγωγό ΚΛ θα είναι το ήμισυ του ολικού ρεύματος, άρα

$$I' = \frac{I_{ολ}}{2} = \frac{E}{2r + R}$$

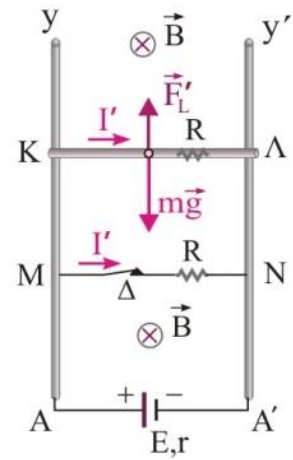
Οπότε η νέα δύναμη Laplace γίνεται

$$F'_L = BI'\ell = BI \frac{E}{2r + R} \quad (2)$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $F'_L < F_L$.

Άρα ο αγωγός ΚΛ θα κινηθεί προς τα κάτω.

Άρα, σωστή είναι η επιλογή β.

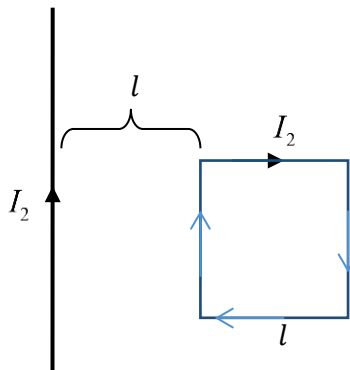


Ερώτηση 38.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται ένας ευθύγραμμος αγωγός πολύ μεγάλου μήκους που διαρρέεται με σταθερό ρεύμα έντασης I_1 και σε απόσταση ℓ , τετραγωνικό πλαίσιο ομοεπίπεδο με τον ευθύγραμμο αγωγό.

Το πλαίσιο έχει πλευρά μήκους ℓ , μάζα m , και διαρρέεται με ρεύμα έντασης I_2 , με φορά όπως αυτή των δεικτών του ρολογιού.

Οι αγωγοί βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και τους κρατάμε ακίνητους. Όταν αφήσουμε ελεύθερο το πλαίσιο αυτό θα



α. ισορροπήσει.

β. κινηθεί προς τα αριστερά με αρχική επιτάχυνση $a = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{m}$.

γ. κινηθεί προς τα αριστερά με αρχική επιτάχυνση $a = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3I_1 I_2}{m}$.

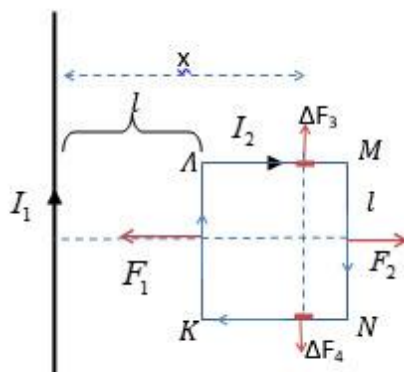
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η β.

Ο ρευματοφόρος αγωγός (I_1) και η πλευρά ΚΛ διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, οπότε στον ΚΛ αναπτύσσεται δύναμη μέτρου F_1 με φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα.

Ο ρευματοφόρος αγωγός και η πλευρά ΜΝ διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, οπότε στον ΚΛ αναπτύσσεται δύναμη μέτρου F_2 με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.



Οι οριζόντιοι αγωγοί του πλαισίου δέχονται δυνάμεις Laplace ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς. Αυτό συμβαίνει γιατί ο ευθύγραμμος αγωγός δημιουργεί ίσες εντάσεις του μαγνητικού πεδίου του σε απόσταση x από αυτόν και ανά δύο τα απέναντι στοιχειώδη τμήματα των οριζόντιων αγωγών δέχονται δυνάμεις που αλληλοαναιρούνται.

$$\Delta F_3 = B_1 I_2 \Delta \ell_3 = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 \Delta \ell_3}{x}$$

$$\Delta F_4 = B_1 I_2 \Delta \ell_4 = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 \Delta \ell_4}{x}$$

$$\Sigma F_{3,4} = \Delta F_3 - \Delta F_4 = 0$$

Άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο καθορίζεται μόνο από τη συνισταμένη των F_1, F_2 .

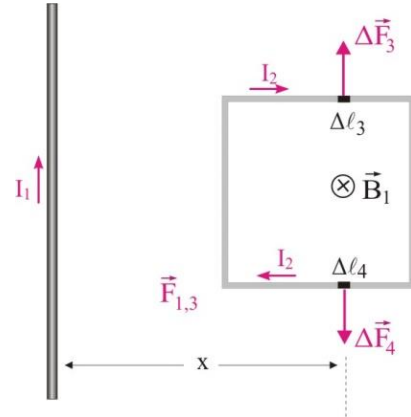
$$F_1 = B_1 I_2 \ell = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 \cdot \ell}{\ell} \Rightarrow F_1 = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I_1 I_2$$

$$F_2 = B_1' I_2 \ell = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 \cdot \ell}{2\ell} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot I_1 I_2$$

$$\Sigma F_{1,2} = F_1 - F_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot I_1 I_2$$

$$\alpha = \frac{\Sigma F_{1,2}}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{m}$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η β.



Ερώτηση 39.

Οριζόντιος ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός, με φορά ρεύματος από τη Δύση προς την Ανατολή, βρίσκεται εντός του μαγνητικού πεδίου της Γης στο βόρειο ημισφαίριο. Το γήινο μαγνητικό πεδίο έχει φορά από το νότο προς το βορρά, καθώς ο μαγνητικός νότος βρίσκεται στο εσωτερικό της Γης κοντά στον γεωγραφικό βορρά. Στον τόπο που βρίσκεται ο αγωγός, το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου, $\vec{B}$, σχηματίζει γωνία 30° με τον ορίζοντα. Η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός είναι

α. οριζόντια, με κατεύθυνση προς το βορρά με μέτρο $\left| \vec{F}_L \right| = BI\ell$.

β. στο κατακόρυφο επίπεδο βορρά-νότου, πλάγια προς τα πάνω, σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια διεύθυνση, και έχει μέτρο $\left| \vec{F}_L \right| = \frac{1}{2} BI\ell$.

γ. στο κατακόρυφο επίπεδο βορρά-νότου, πλάγια προς τα πάνω, σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια διεύθυνση, και έχει μέτρο $\left| \vec{F}_L \right| = BI\ell$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η γ.

Ο αγωγός είναι στη κατεύθυνση Δύση-Ανατολή και η ένταση του μαγνητικού πεδίου στη κατεύθυνση Νότου-Βορρά. Έχουμε ρευματοφόρο αγωγό που είναι κάθετος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, άρα το μέτρο της δύναμης Laplace είναι $F = BI\ell$.

Μια πυξίδα δείχνει το γεωγραφικό βορρά, επειδή εκεί βρίσκεται ο μαγνητικός νότος. Επειδή είμαστε στο βόρειο ημισφαίριο, το διάνυσμα $\vec{B}$ κατευθύνεται προς το έδαφος, οπότε η γωνία 30° που σχηματίζει με τον ορίζοντα είναι αρνητική.

Επειδή η δύναμη Laplace είναι κάθετη στο $\vec{B}$, θα πρέπει να σχηματίζει γωνία 60° με τον ορίζοντα.

Άρα, σωστή πρόταση είναι η γ.

Ερώτηση 40.

Τετραγωνικό πλαίσιο εμβαδού S τοποθετείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B , έτσι ώστε οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές να σχηματίζουν με την επιφάνεια του πλαισίου γωνία 30° . Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο είναι Φ_1 . Έπειτα, περιστρέφουμε το πλαίσιο, έτσι ώστε να γίνει κάθετο στην ένταση του μαγνητικού πεδίου. Η νέα μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο είναι Φ_2 . Η μαθηματική σχέση που συνδέει τις δύο μαγνητικές ροές είναι

α. $\Phi_2 = \sqrt{2}\Phi_1$.

β. $\Phi_2 = 2\Phi_1$.

γ. $\Phi_2 = \frac{1}{2}\Phi_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

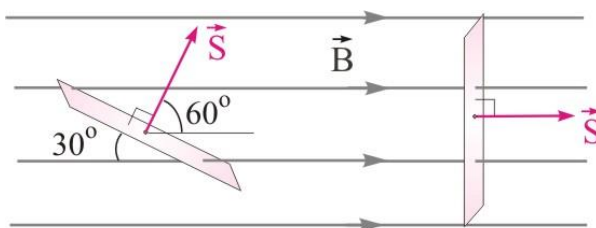
Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές σχηματίζουν με την επιφάνεια του πλαισίου γωνία 30° , το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του πλαισίου σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές γωνία 60° , όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Έτσι, η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_1 = BS \sin 60^\circ = BS \frac{1}{2} = \frac{BS}{2}$$

Όταν το πλαίσιο γίνει κάθετο στην ένταση του μαγνητικού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, η νέα μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο είναι $\Phi_2 = BS = 2\Phi_1$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.



Σχήμα 1

Σχήμα 2

Ερώτηση 41.

Ένα σωληνοειδές με N σπείρες και μήκος L διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I , δημιουργώντας στο εσωτερικό του ομογενές μαγνητικό πεδίο. Ένας κυκλικός μεταλλικός αγωγός ακτίνας r βρίσκεται ολόκληρος μέσα στο σωληνοειδές, με το επίπεδό του σε γωνία $\theta=30^\circ$ με τον άξονα του σωληνοειδούς. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον κυκλικό αγωγό είναι

α. $\Phi = 2\pi^2 k_\mu I \frac{N}{L} r^2$.

β. $\Phi = 4\pi k_\mu I \frac{N}{L} r^2$.

γ. $\Phi = 8\pi^2 k_\mu I \frac{N}{L} r$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

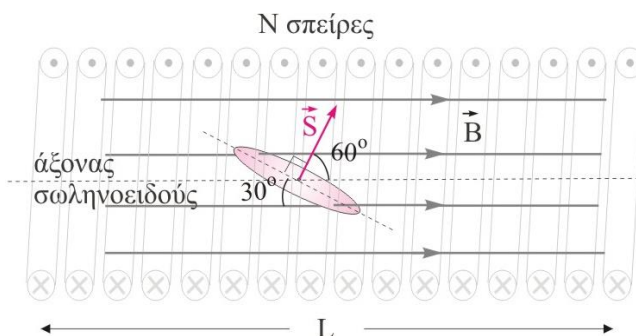
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Το ομογενές μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς έχει ένταση, της οποίας το μέτρο δίνεται από τη σχέση

$$B = 4\pi k_\mu \frac{N}{L} I \quad (1)$$

Επειδή ο άξονας του σωληνοειδούς και κατά συνέπεια και οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές σχηματίζουν με την επιφάνεια του κυκλικού πλαισίου γωνία $\theta=30^\circ$, το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του πλαισίου σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές γωνία $\alpha=60^\circ$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το κυκλικό πλαίσιο δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = BS \cos \alpha = B \pi r^2 \cos 60^\circ = B \pi r^2 \frac{1}{2} = \frac{B \pi r^2}{2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\Phi = 4\pi k_\mu I \frac{N}{L} \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 k_\mu I \frac{N}{L} r^2$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Η ελάχιστη χρονική διάρκεια για τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ είναι t_A . Η ελάχιστη χρονική διάρκεια t_B για τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=+\frac{A}{2}$ στη θετική ακραία θέση $x=+A$ της ταλάντωσης είναι

α) μικρότερη από t_A .

β) ίση με t_A .

γ) μεγαλύτερη από t_A .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Κατά τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ διανύεται απόσταση $s=\frac{A}{2}$ σε χρονικό διάστημα t_A . Επομένως, η μέση ταχύτητα της κίνησης είναι

$$\bar{v}_A = \frac{s}{t_A}.$$

Κατά τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x=+\frac{A}{2}$ στη θετική ακραία θέση $x=+A$ της ταλάντωσης, διανύεται απόσταση $s=\frac{A}{2}$ σε χρονικό διάστημα t_B . Επομένως, η μέση ταχύτητα της κίνησης είναι $\bar{v}_B = \frac{s}{t_B}$.

Καθώς το σώμα κινείται από τη θέση ισορροπίας προς την ακραία θέση η ταχύτητά του διαρκώς μειώνεται. Έτσι, η κίνηση από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ γίνεται με

μεγαλύτερη μέση ταχύτητα απ' ό,τι η κίνηση από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$ στη θετική ακραία θέση $x = +A$ της ταλάντωσης.

$$\bar{v}_A > \bar{v}_B \Rightarrow \frac{s}{t_A} > \frac{s}{t_B} \Rightarrow t_B > t_A$$

(βλ. σελ. 10 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 2.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αντικαθιστούμε το ελατήριο με άλλο, σταθεράς $2k$, χωρίς να αλλάξουμε το αναρτημένο σώμα. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από τη νέα θέση ισορροπίας κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο λόγος $\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}}$ των μέτρων των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ταλαντώσεων είναι ίσος με

α) 2 .

β) 1 .

γ) $\frac{1}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Η μέγιστη επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο: $a_{\max} = \omega^2 A$.

Επειδή $D = k = m\omega^2$ έχουμε: $k = m\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

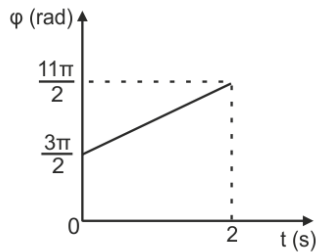
Με αντικατάσταση στο λόγο $\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}}$ των μέτρων των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ταλαντώσεων, έχουμε:

$$\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\omega_1^2 A}{\omega_2^2 A} \Rightarrow \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{2k}{m}} \Rightarrow \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{k}{2k} \Rightarrow \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{1}{2}$$

(βλ. σελ. 10-11 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 3.

Η φάση μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα:



Η περίοδος της ταλάντωσης είναι ίση με

- α) 1 s .
- β) 2 s .
- γ) $2\pi\text{ s}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η α.

Η σχέση της φάσης με το χρόνο δίνεται από τον τύπο: $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι για $t = 0 \rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}\text{ rad}$. Με αντικατάσταση έχουμε: $\frac{3\pi}{2} = 0 + \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{ rad}$.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι για $t = 2\text{ s} \rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{2}\text{ rad}$. Με αντικατάσταση έχουμε: $\frac{11\pi}{2} = \omega \cdot 2 + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ έχουμε: $T = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow T = 1\text{ s}$

(βλ. σελ. 8-11 του Σχολικού Βιβλίου)

Εναλλακτικά, επειδή $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{σταθ.} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\varphi_{\text{τελ}} - \varphi_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{11\pi/2 - 3\pi/2}{2 - 0} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T = 1\text{ s}$$

Ερώτηση 4.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα πάνω μέχρι να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι ίσο με

α) Μηδέν.

β) $k \cdot A$.

γ) $2k \cdot A$.

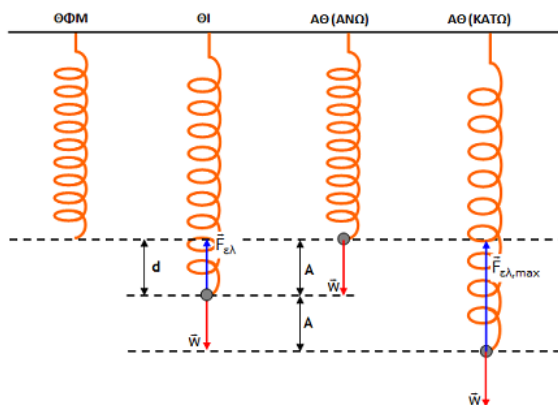
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Το σώμα ελευθερώνεται από τη θέση του Φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα το πλάτος ταλάντωσης A ισούται με την απόσταση d μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους ελατηρίου (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης (ΘΙ).

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα μπορεί να βρεθεί από το Νόμο Hooke: $F_{ελ} = kL$, όπου L η επιμήκυνση του ελατηρίου. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο είναι μέγιστο στη θέση που το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνση L_{max} . Από το σχήμα φαίνεται ότι αυτή είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ΑΘ ΚΑΤΩ στην οποία $L = 2A$.



$$\text{Επομένως: } F_{ελ,max} = kL_{max} \Rightarrow F_{ελ,max} = 2k \cdot A$$

Ερώτηση 5.

Να αποδείξετε ότι σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας, το πλάτος A της ταλάντωσης, η ταχύτητα v του σώματος στην απομάκρυνση x και η μέγιστη ταχύτητα $v_{\max}$ της ταλάντωσης, συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1.$$

Λύση

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στην ταλάντωση, έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA^2} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}DA^2} + \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2} \Rightarrow 1 = \frac{mv^2}{m\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1$$

Ερώτηση 6.

Ένα μικρό σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ενέργεια ταλάντωσης 20 J . Κάποια στιγμή, που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης, του ασκούμε στιγμιαία δύναμη με αποτέλεσμα το διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης. Το έργο που προσφέραμε στο ταλαντούμενο σύστημα μέσω αυτής της στιγμιαίας δύναμης, για το διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης, είναι ίσο με

α) 20 J .

β) 60 J .

γ) 80 J .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Το έργο W που προσφέραμε στο ταλαντούμενο σύστημα για το διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης, είναι ίσο με: $W = E' - E$, όπου E η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης και E' η τελική ενέργεια της ταλάντωσης. Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$W = E' - E \Rightarrow W = \frac{1}{2}D(A')^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}D(2A)^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}D4A^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = 3 \cdot \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = 3E \Rightarrow W = 60 \text{ J}$$

(βλ. σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

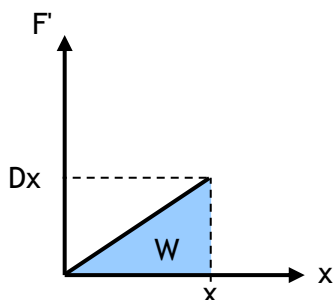
Ερώτηση 7.

Για ένα σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, να γράψετε τη σχέση που δίνει τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Να αποδείξετε τη σχέση που γράψατε.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι $U = \frac{1}{2} Dx^2$ με απόδειξη.

Έστω ότι το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση ισορροπίας. Δεχόμαστε ότι σ' αυτή τη θέση, το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν. Για να μετακινηθεί το σώμα σε μια άλλη θέση που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, πρέπει να του ασκηθεί δύναμη F' , ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς, ώστε να εξουδετερώνει τη δύναμη επαναφοράς F . Το μέτρο της F' , σε κάθε θέση, θα είναι: $F' = Dx$. Το έργο W της δύναμης F' αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια U στο σύστημα. Επομένως, η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί για να μετακινηθεί το σώμα από τη θέση ισορροπίας, στη θέση που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας. Ο υπολογισμός αυτού του έργου γίνεται από τη γραφική παράσταση $F'=f(x)$, επειδή η F' είναι μεταβλητή δύναμη. Το εμβαδόν της επιφάνειας (τριγώνου) μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα x είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της δύναμης F' :



$$U = W = \frac{1}{2} \cdot x \cdot Dx \Rightarrow U = \frac{1}{2} Dx^2$$

(η απόδειξη βρίσκεται και στη σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 8.

Το πλάτος A μιας φθίνουσας ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος και Λ μια θετική σταθερά. Ο απαιτούμενος χρόνος μέχρι το πλάτος της ταλάντωσης να γίνει $\frac{A_0}{2}$ είναι

α) $\frac{\ln 2}{2\Lambda}$.

β) $\frac{\ln 2}{\Lambda}$.

γ) $\frac{2 \ln 2}{\Lambda}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Θέτουμε $A = \frac{A_0}{2}$ στη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t} \Rightarrow$$

$$-\ln 2 = -\Lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

(βλ. σελ. 19 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 9.

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι A η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E . Όταν η ενέργεια της ταλάντωσης γίνει $\frac{E}{2}$, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

α) $\frac{A}{4}$.

β) $\frac{A}{2}$.

γ) $\frac{A\sqrt{2}}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

Με χρήση της σχέσης $E = \frac{1}{2}DA^2$ και με διαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{E_{\alpha\rho\chi}}{E_{\tau\epsilon\lambda}} = \frac{E}{\frac{E}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}DA_{\alpha\rho\chi}^2}{\frac{1}{2}DA_{\tau\epsilon\lambda}^2} = 2 \Rightarrow A_{\tau\epsilon\lambda}^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow A_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

(βλ. σελ. 13 & 18 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 10.

Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Κάποια στιγμή, το πλάτος της ταλάντωσης είναι A και η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E . Όταν το πλάτος της ταλάντωσης μειωθεί κατά 50%, η ενέργεια που έχει απομείνει στο σύστημα είναι

α) $0,75E$.

β) $0,5E$.

γ) $0,25E$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης μειωθεί κατά 50%, θα ισχύει ότι $A' = \frac{A}{2}$.

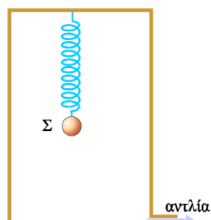
Η ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}DA^2$. Για την ενέργεια E' που έχει απομείνει στο σύστημα, έχουμε:

$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 \Rightarrow E' = \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 \Rightarrow E' = \frac{1}{2}D\frac{A^2}{4} \Rightarrow E' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E' = 0,25E$$

(βλ. σελ. 13 & 18-20 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 11.

Η σφαίρα Σ είναι αναρτημένη σε ιδανικό ελατήριο και εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στο εσωτερικό του δοχείου. Με τη χρήση μιας αεραντλίας μειώνουμε πολύ αργά την πίεση του αέρα στο δοχείο. Από τη στιγμή που σταματά η λειτουργία της αεραντλίας, το πλάτος της ταλάντωσης της σφαίρας Σ σε σχέση με το χρόνο



α) αυξάνεται.

β) παραμένει σταθερό.

γ) μειώνεται.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

(βλ. σελ. 18 του Σχολικού Βιβλίου)

Μετά το σταμάτημα της λειτουργίας της αεραντλίας στο δοχείο εξακολουθεί να υπάρχει μια ποσότητα αέρα. Ο αέρας προκαλεί δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση, επομένως, προκαλεί απόσβεση και ελάττωση του πλάτους.

Ερώτηση 12.

Ένα σώμα μάζας m είναι κρεμασμένο από ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A_1 και συχνότητας f_1 , μικρότερης από την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1 , πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη

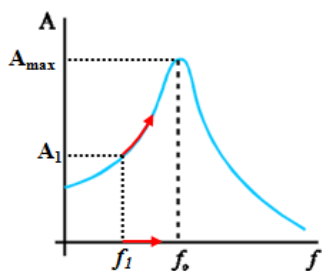
- α) να αυξηθεί και να πλησιάσει την τιμή f_0 .
- β) να μειωθεί.
- γ) να αυξηθεί και να ξεπεράσει κατά πολύ την τιμή f_0 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το α.

Στο σχήμα φαίνεται η εξάρτηση του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα του διεγέρτη:

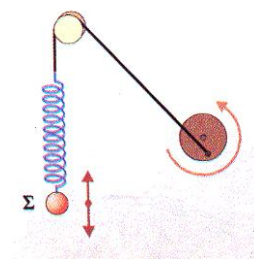


Η συχνότητα f_0 αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού, δηλαδή, στη συχνότητα στην οποία μεγιστοποιείται το πλάτος ταλάντωσης. Όπως φαίνεται, επειδή $f_1 < f_0$, για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1 , πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη να αυξηθεί και να πλησιάσει την τιμή f_0 , δηλαδή, το σύστημα να πλησιάσει στην κατάσταση συντονισμού.

(βλ. σελ. 22 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 13.

Το σώμα μάζας m του σχήματος εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μέσα σε δοχείο που περιέχει αέρα υπό πίεση, από τον οποίο δέχεται δύναμη της μορφής $F' = -bv$ με $b = \text{σταθ.}$. Αν αυξηθεί η πίεση του αέρα στο δοχείο, με αποτέλεσμα να υπάρξει μια μικρή αύξηση της σταθεράς b , το σώμα θα εκτελέσει:



α) φθίνουσα ταλάντωση.

β) αμείωτη ταλάντωση μικρότερου πλάτους.

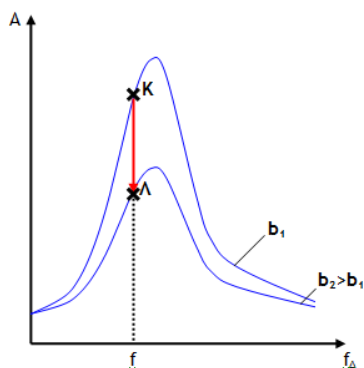
γ) απεριοδική κίνηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Η εξάρτηση του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα f του διεγέρτη, καθώς και από τη σταθερά απόσβεσης b , φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αν αυξηθεί η πίεση του αέρα στο δοχείο, αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b . Για μια συγκεκριμένη συχνότητα f , το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση K του σχήματος, στην κατάσταση L . Επομένως, θα μειωθεί το πλάτος της ταλάντωσης, σε σχέση με το προηγούμενο. Όμως το νέο πλάτος ταλάντωσης θα παραμένει σταθερό σε σχέση με το χρόνο, διότι η ταλάντωση είναι εξαναγκασμένη.

(βλ. σελ. 23 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 14.

Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις, των οποίων το πλάτος σε σχέση με το χρόνο μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t}$$

Μετά από χρονικό διάστημα Δt το ποσοστό ελάττωσης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι 84%. Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το ποσοστό ελάττωσης του πλάτους είναι

α. 60%.

β. 84%.

γ. 90%.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το ποσοστό ελάττωσης της ενέργειας ταλάντωσης είναι

$$\Pi\% = \frac{E_0 - E}{E_0} 100\% = 84\% \quad \text{ή} \quad \frac{E_0 - E}{E_0} = 0,84 \quad \text{ή} \quad E = 0,16E_0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = 0,16 \frac{1}{2}DA_0^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,4A_0$$

Το αντίστοιχο ποσοστό ελάττωσης του πλάτους είναι

$$\Pi\% = \frac{A_0 - A}{A_0} 100\% = \frac{A_0 - 0,4A_0}{A_0} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi\% = 60\%$$

Ερώτηση 15.

Δύο απλοί αρμονικοί ταλαντωτές Α και Β με σταθερές επαναφοράς D_A και D_B αντίστοιχα, με $D_A > D_B$, εκτελούν αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις και έχουν την ίδια μέγιστη κινητική ενέργεια. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

- μεγαλύτερος στον ταλαντωτή Α.
- μεγαλύτερος στον ταλαντωτή Β.
- ίσος και στους δύο ταλαντωτές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η μέγιστη δύναμη,

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{\max} = F_{\max} = D \cdot A.$$

$$\text{Άρα, } \frac{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{A,\max}}{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{B,\max}} = \frac{D_A \cdot A_A}{D_B \cdot A_B} \quad (1)$$

Οι δύο ταλαντωτές έχουν την ίδια μέγιστη κινητική ενέργεια, δηλαδή την ίδια ολική ενέργεια:

$$E_1 = E_2, \text{ άρα } \frac{1}{2} D_A A_A^2 = \frac{1}{2} D_B A_B^2 \Rightarrow \frac{D_A}{D_B} = \frac{A_B^2}{A_A^2} > 1 \Rightarrow A_B > A_A$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{A,\max}}{\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{B,\max}} = \frac{A_B^2 \cdot A_A}{A_A^2 \cdot A_B} = \frac{A_B}{A_A} > 1 \Rightarrow \left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{A,\max} > \left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)_{B,\max}.$$

Ερώτηση 16.

Ένα σώμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση $x = +A$. Η φάση της ταλάντωσης όταν το σώμα εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση είναι

α. $\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$

β. $\varphi = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}.$

γ. $\varphi = \frac{7\pi}{2} \text{ rad}.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα δε διέρχεται από τη θέση ισορροπίας η ταλάντωση έχει αρχική φάση φ_0 και μετά από μια πλήρη ταλάντωση η φάση της θα είναι:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} T + \varphi_0 \Rightarrow \varphi = 2\pi + \varphi_0 \quad (1)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 .

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Για $t=0$ δίνεται $x = +A$, οπότε έχουμε:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi, \text{ άρα } k=0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

$$\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

Ερώτηση 17.

Ένα σώμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$, σύμφωνα με τη σχέση $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$. Τη χρονική στιγμή $t=\frac{T}{2}$ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του γίνεται μέγιστος για πρώτη φορά. Η αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης είναι

α. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

β. $\varphi_0 = \pi \text{ rad}.$

γ. $\varphi_0 = 0 \text{ rad}.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι ίσος με τη συνολική δύναμη που

δέχεται, $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -D \cdot x$ και γίνεται μέγιστος στη θέση $x = -A$. Στο $+A$ η δύναμη επαναφοράς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι αρνητικοί.

Η εξίσωση ταλάντωσης ενός σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Με αντικατάσταση στην εξίσωση θέσης -χρόνου, $t = \frac{T}{2}$ και $x = -A$ βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -A = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + \varphi_0\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu(\pi + \varphi_0) = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi + \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Για $k=0$ παίρνουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Ερώτηση 18.

Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες m και $2m$ αντίστοιχα, είναι δεμένα στα άκρα δύο ελατηρίων με σταθερές k και $\frac{k}{2}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο σώματα εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίσες μέγιστες επιταχύνσεις.



Για τις ολικές ενέργειες των ταλαντώσεων E_1 και E_2 ισχύει

α. $E_2 = E_1$

β. $E_2 = 4 E_1$

γ. $E_2 = 8 E_1$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τις ολικές ενέργειες των ταλαντώσεων E_1 και E_2 ισχύει

$$E_1 = \frac{1}{2} k \cdot A_1^2 \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{2} \cdot A_2^2$$

Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μέγιστες επιταχύνσεις,

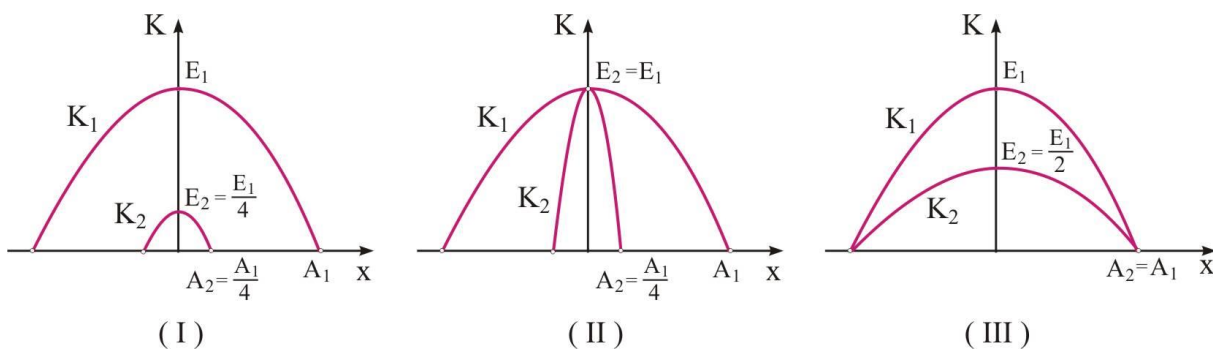
$$a_{1,\max} = a_{2,\max} \Rightarrow \omega_1^2 A_1 = \omega_2^2 A_2 \Rightarrow \frac{k}{m} \cdot A_1 = \frac{k/2}{2m} \cdot A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{4} \Rightarrow A_2 = 4A_1$$

Οπότε με αντικατάσταση στην E_2 παίρνουμε

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{2} \cdot A_2^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{2} \cdot (4A_1)^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} k \cdot A_1^2 \Rightarrow E_2 = 8E_1.$$

Ερώτηση 19.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο και ισορροπεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1 του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ταλάντωση. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με ένα άλλο ελατήριο σταθεράς $k_2 = 4k_1$. Οι γραφικές παραστάσεις των κινητικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος



α. (I)

β. (II)

γ. (III)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

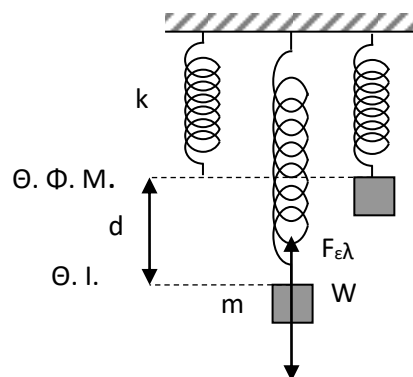
Τα διαγράμματα διαφοροποιούνται στα πλάτη ταλάντωσης και στις ενέργειες ταλάντωσης.

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με την απόσταση της θέσης φυσικού μήκους του ελατηρίου και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης, δηλαδή $A=d$. Η συνθήκη ισορροπίας δίνει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W = F_{ελ} \Rightarrow m \cdot g = k \cdot d \Rightarrow d = \frac{m \cdot g}{k}.$$

$$\text{Άρα } A_1 = d_1 = \frac{m \cdot g}{k_1} \text{ και}$$

$$A_2 = d_2 = \frac{m \cdot g}{k_2} = \frac{m \cdot g}{4k_1} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{4}.$$



Η σχέση αυτή ικανοποιείται στα διαγράμματα (I) και (II).

Η ενέργεια της ταλάντωσης στις δύο περιπτώσεις είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 \cdot d_1^2 = \frac{1}{2} k_1 \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot g^2}{k_1} \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 \cdot d_2^2 = \frac{1}{2} k_2 \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot g^2}{k_2} = \frac{1}{2} \frac{m^2 \cdot g^2}{4k_1} \Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{4}.$$

Άρα σωστό είναι το διάγραμμα (I).

Ερώτηση 20.

Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$. Αν με A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 συμβολίσουμε διαδοχικά πλάτη της ταλάντωσης προς την ίδια κατεύθυνση, τότε ισχύει η σχέση

α. $\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}$.

β. $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_3}$.

γ. $\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_2}{A_1}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Α' τρόπος

Στις φθίνουσες ταλαντώσεις, που το πλάτος δίνεται από τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$, για τα

διαδοχικά πλάτη ισχύει $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} = \dots$.

Από την προηγούμενη σειρά σχέσεων επιλέγουμε 2 σχέσεις:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_3}{A_4} \Rightarrow A_0 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_3 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_2 \cdot A_2 = A_1 \cdot A_3 \quad (2)$$

Τα δεύτερα μέλη των προηγούμενων σχέσεων είναι ίσα, άρα και τα πρώτα,

$$A_0 \cdot A_4 = A_2 \cdot A_2 \Rightarrow \frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}.$$

Β' τρόπος

Θα δείξουμε ότι η σχέση $\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}$ είναι σωστή, με βάση τη σχέση $A=A_0e^{-\lambda t}$.

Σε χρόνο $t=2T$ το πλάτος θα είναι $A_2=A_0e^{-\Lambda 2T}$ και σε χρόνο $t=4T$ το πλάτος θα είναι $A_4=A_0e^{-\Lambda 4T}$. Άρα

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_0}{A_0e^{-\Lambda 2T}} \Rightarrow \frac{A_0}{A_2} = e^{\Lambda 2T} \quad (3)$$

$$\frac{A_2}{A_4} = \frac{A_0e^{-\Lambda 2T}}{A_0e^{-\Lambda 4T}} \Rightarrow \frac{A_2}{A_4} = e^{-\Lambda 2T + \Lambda 4T} \Rightarrow \frac{A_2}{A_4} = e^{\Lambda 2T} \quad (4)$$

Τα δεύτερα μέλη των προηγούμενων σχέσεων είναι ίσα, άρα και τα πρώτα, άρα

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_2}{A_4}.$$

Ερώτηση 21.

Ένα σώμα μάζας m είναι προσδεμένο σε ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Αντικαθιστούμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια και διατηρούμε τη συχνότητα του διεγέρτη σταθερή. Η παραπάνω μεταβολή προκαλεί

α. τριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και αύξηση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.

β. υποτριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και μείωση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.

γ. μόνο μείωση του πλάτους της ταλάντωσης του συστήματος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

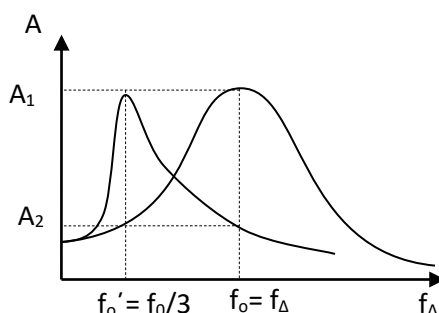
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Αν αντικαταστήσουμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια, $m' = 9m$, η νέα ιδιοσυχνότητα θα είναι

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{9m}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad f_0' = \frac{1}{3}f_0$$

Εφόσον αρχικά η συχνότητα του διεγέρτη ήταν ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος είχαμε το φαινόμενο του συντονισμού και το πλάτος ήταν μέγιστο, A_1 . Με την αλλαγή της ιδιοσυχνότητας παύει η συχνότητα του διεγέρτη να ισούται με τη νέα ιδιοσυχνότητα, με συνέπεια να παύει το φαινόμενο του συντονισμού, οπότε το πλάτος ταλάντωσης ελαττώνεται και γίνεται $A_2 < A_1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Ερώτηση 22.

Ένα ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο είναι στερεωμένο με το κάτω άκρο του σε οριζόντιο δάπεδο, ενώ στο πάνω άκρο του υπάρχει στερεωμένο σώμα μάζας m_1 . Συσπειρώνουμε επιπλέον το ελατήριο απομακρύνοντας το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_1 και συχνότητα f_1 .

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία αντικαθιστώντας μόνο το σώμα με ένα άλλο τετραπλάσιας μάζας ($m_2 = 4m_1$). Η νέα ενέργεια ταλάντωσης E_2 και η νέα συχνότητα f_2 είναι αντίστοιχα

α. $E_2 = E_1$ και $f_2 = f_1$.

β. $E_2 = 2E_1$ και $f_2 = f_1$.

γ. $E_2 = E_1$ και $f_2 = f_1/2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2} k \cdot A^2, \text{ όμως και στις δύο περιπτώσεις } A = d. \text{ Άρα } E_2 = E_1.$$

Για τις συχνότητες f ισχύει:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ και } f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4m_1}}, \text{ άρα } f_2 = \frac{f_1}{2}.$$

Ερώτηση 23.

Ένα σύστημα ξεκινά φθίνουσες ταλαντώσεις με αρχική ενέργεια 100J και αρχικό πλάτος A_0 . Το έργο της δύναμης αντίστασης μετά από N ταλαντώσεις είναι -75J. Άρα το πλάτος ταλάντωσης μετά από N ταλαντώσεις είναι:

α. $A_0/2$.

β. $A_0/16$.

γ. $A_0/5$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

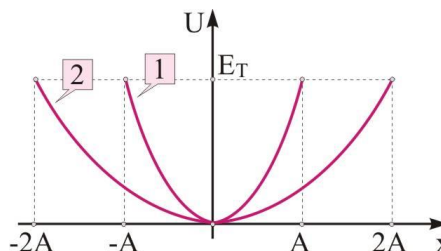
Γνωρίζουμε πως το έργο της $F_{αντ.}$ είναι ίσο με την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, άρα θα έχουμε:

$$|W_{F_{αντ.}}| = E_{αρχ} - E_{τελ} \Rightarrow 75J = 100J - E_{τελ} \Rightarrow E_{τελ} = 25J, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{E_{τελ.}}{E_{αρχ}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}DA_N^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{A_N}{A_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_N = \frac{A_0}{2}.$$

Ερώτηση 24.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, $U = f(x)$, για δύο συστήματα μάζας – ελατηρίου που εκτελούν α.α.τ. Αν γνωρίζουμε ότι οι μάζες συνδέονται με τη σχέση $m_1 = m_2$, ο λόγος των περιόδων ταλάντωσης $\frac{T_1}{T_2}$ είναι ίσος με



α. 2.

β. 1/2.

γ. 1/4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο λόγος το περιόδων είναι ίσος με:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

Από το σχήμα προκύπτει πως $U_{\max,1} = U_{\max,2}$ και $A_2 = 2A_1 = 2A$.

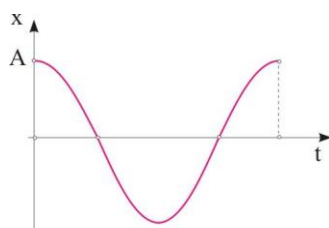
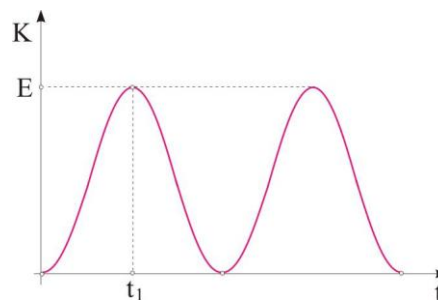
$$U_{\max,1} = U_{\max,2} \Rightarrow \frac{1}{2}k_1A^2 = \frac{1}{2}k_2(2A)^2 \Rightarrow k_1 = 4k_2.$$

Με αντικατάσταση στην αρχική σχέση παίρνουμε:

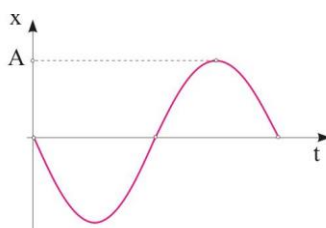
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{4k_2}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 25.

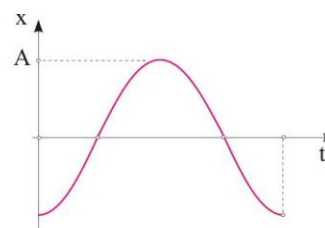
Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος έχει θετικό πρόσημο, η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι η



(α)



(β)



(γ)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

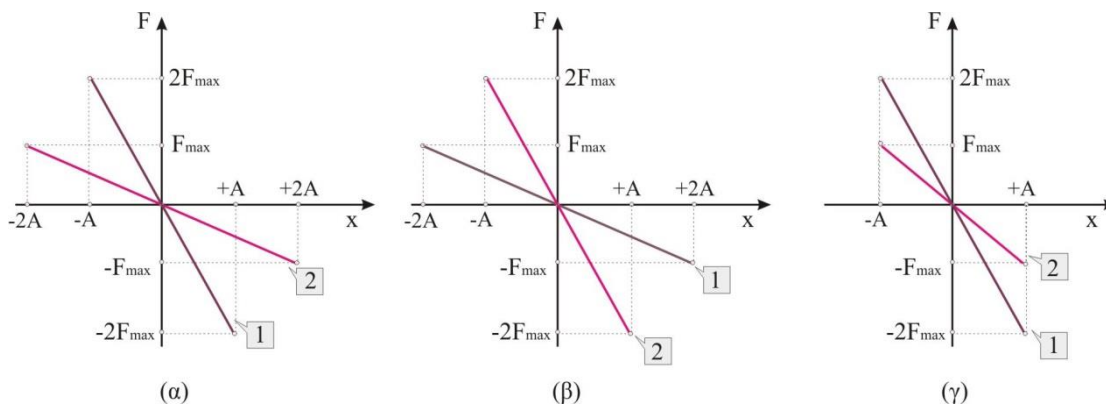
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Από το διάγραμμα $K = f(t)$ προκύπτει πως τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει $K=0$, άρα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής, $x=+A$ ή $x=-A$. Επίσης την χρονική στιγμή t_1 ($t_1=T/4$) η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη, δηλαδή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με μέγιστη ταχύτητα η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι θετική. Άρα το σώμα ξεκινά από $x=-A$.

Άρα το σωστό διάγραμμα, $x = f(t)$, είναι το γ.

Ερώτηση 26.

Δύο αρμονικοί ταλαντωτές (1) και (2) με σταθερές επαναφοράς D_1 και D_2 αντίστοιχα, έχουν σώματα των οποίων οι μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με τη σχέση $m_1 = 4m_2$. Οι δύο ταλαντωτές έχουν τις ίδιες ενέργειες ταλάντωσης E και τις ίδιες περιόδους T . Το σχήμα που δείχνει τα διαγράμματα των δυνάμεων επαναφοράς τους F σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x , $F = f(x)$, είναι το



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α)

Από τη σχέση των δύο περιόδων έχουμε:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{4m_2}{D_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{D_2}} \Rightarrow D_1 = 4D_2$$

Από τη σχέση των ενεργειών έχουμε:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} 4D_2 A_1^2 = \frac{1}{2} D_2 A_2^2 \Rightarrow A_2 = 2A_1. \text{ Έτσι, αν } A_1 = A \text{ τότε } A_2 = 2A.$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνο στο σχήμα (α).

Ερώτηση 27.

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μειώνεται και η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης αυξάνεται. Άρα η ταχύτητα

α. και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση.

β. είναι αρνητική και το μέτρο της μειώνεται.

γ. είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

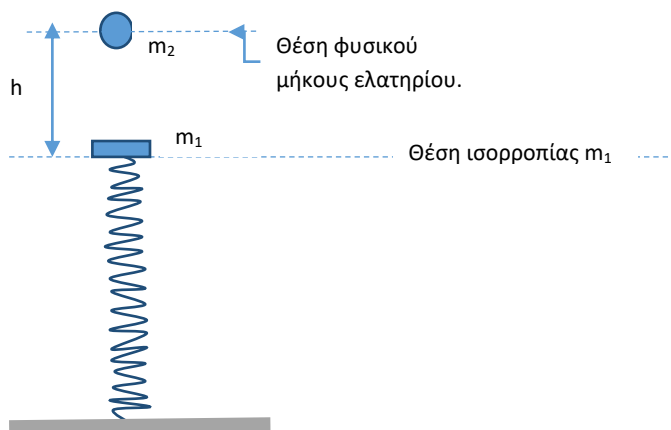
Αφού η κινητική ενέργεια μειώνεται το σώμα κατευθύνεται προς ακραία θέση, δηλαδή πηγαίνει από τη θέση ισορροπίας προς το $+A$ ή προς το $-A$.

Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης ($a = -\omega^2 x$) αυξάνεται καθώς το σώμα κινείται από το $+A$ προς το $-A$.

Άρα, αφού το σώμα έχει μείωση κινητικής ενέργειας και ταυτόχρονα αύξηση της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης κινείται από τη θέση ισορροπίας προς το $-A$.

Στο διάστημα αυτό της κίνησης η ταχύτητα είναι αρνητική και το μέτρο της μειώνεται.

Ερώτηση 28.



Στο σχήμα το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί χαμηλότερα κατά h από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αφήνουμε σώμα ίσης μάζας ($m_2 = m_1 = m$) να κάνει ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα του ελατηρίου. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική ελαστική, και αμέσως μετά την κρούση, απομακρύνεται η μάζα m_2 , ενώ το σώμα m_1 εκτελεί α.α.τ. Το πλάτος ταλάντωσης του m_1 είναι

α) h .

β) $2h$.

γ) $h\sqrt{2}$.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση και αιτιολογείστε.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τη θέση ισορροπίας ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $F_{\text{ελατ.}} = mg$ ή $kh = mg$ (1)

Με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής Ενέργειας για την πτώση της μάζας m_2 βρίσκουμε την ταχύτητά της ελάχιστα πριν την κρούση:

$$mgh = \frac{1}{2}mu_2^2 \quad \text{ή} \quad u_2 = \sqrt{2gh}$$

Επειδή οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες και η κρούση κεντρική ελαστική, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε το σώμα μάζας m_1 θα ξεκινήσει αρμονική ταλάντωση με

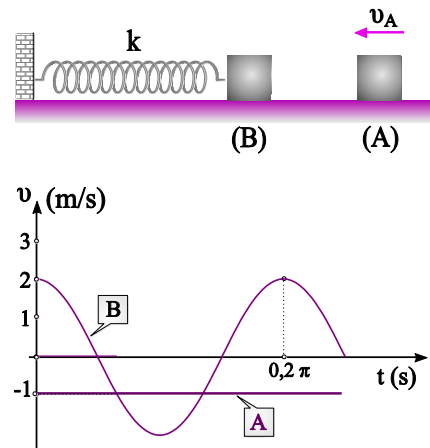
$$v_{\text{max}} = u_2 = \sqrt{2gh}.$$

Έχουμε: $v_{\max} = \omega A \Rightarrow \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{k}{m}} A$ και με αντικατάσταση του k από τη σχέση (1)

εύκολα προκύπτει $A = h\sqrt{2}$.

Ερώτηση 29.

Το σώμα Β του σχήματος είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου. Το σώμα Α, μάζας m_A , κινούμενο με ταχύτητα $u_A=3\text{m/s}$ κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται μετωπικά με το σώμα Β τη χρονική στιγμή $t=0$. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την κρούση (θετική φορά προς τα αριστερά) φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα ταχυτήτων-χρόνου. Οι μάζες των σωμάτων Α και Β συνδέονται με τη σχέση



α. $m_B = m_A$

β. $m_B = 2 m_A$

γ. $m_B = 3 m_A$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

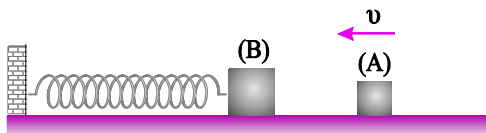
Από το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι αμέσως μετά την κρούση το Β έχει ταχύτητα $u_B' = 2\text{m/s}$ και το Α επιστρέφει με $u_A' = -1\text{m/s}$.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_A u_A = m_B u_B' + m_A u_A' \Rightarrow m_A \cdot (3\text{m/s}) = m_B \cdot (2\text{m/s}) + m_A \cdot (-1\text{m/s}) \Rightarrow m_B = 2m_A$$

Ερώτηση 30.

Τα σώματα (Α) και (Β) του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και έχουν μάζες που συνδέονται με τη σχέση $m_B = 3m_A$. Το σώμα (Α) κινούμενο με ταχύτητα μέτρου v συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με το ακίνητο σώμα (Β) το οποίο είναι δεμένο στην άκρη του οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Μετά την κρούση, το σώμα (Β) ταλαντώνεται με περίοδο T και πλάτος A για το οποίο ισχύει



α. $A = \frac{vT}{2}$

β. $A = \frac{vT}{2\pi}$

γ. $A = \frac{vT}{4\pi}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Α. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα το σώμα Β μετά την κρούση θα αποκτήσει ταχύτητα v_B η οποία έχει μέτρο

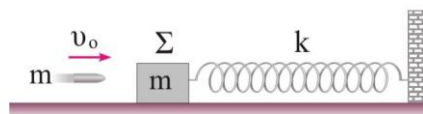
$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v \Rightarrow v_B = \frac{v}{2}$$

Η ταχύτητα v_B είναι η μέγιστη της ταλάντωσης, αφού το σώμα (Β) τη στιγμή της κρούσης βρίσκεται στη θέση ισορροπίας.

$$\text{Επομένως, } v_B = \omega A \Rightarrow \frac{v}{2} = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow A = \frac{vT}{4\pi}$$

Ερώτηση 31.

Το σώμα Σ του σχήματος, μάζας m , είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και δεμένο στην άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k . Ένα βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα u_0 κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ. Το ποσοστό της ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε ενέργεια ταλάντωσης είναι ίσο με



α. 50%

β. $200/3$ %

γ. 75%

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

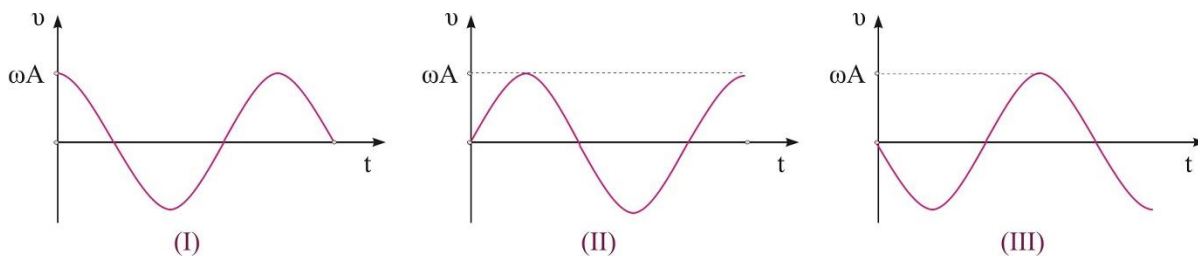
Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ έχουμε: $p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow mv_0 = (m + m)v_K \Rightarrow v_K = \frac{v_0}{2}$

Η u_K είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, αφού η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας

$$\Pi\% = \frac{K_{\max}}{K_{\beta\lambda}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} 2m \cdot v_K^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} 100\% = 50\%$$

Ερώτηση 32.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η επιτάχυνσή του περιγράφεται από τη σχέση $a = \omega^2 A \sin \omega t$.



Η ταχύτητα ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη γραφική παράσταση

- α. (I).
- β. (II).
- γ. (III).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από τη δοθείσα εξίσωση, $a = \omega^2 A \sin \omega t$, προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, η επιτάχυνση είναι $a = \omega^2 A \sin 0 = 0$

Άρα, την $t=0$ η επιτάχυνση έχει μέγιστο μέτρο και θετικό πρόσημο.

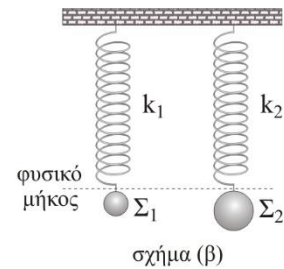
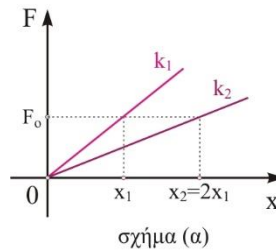
Από τη σχέση $a = -\omega^2 x$ με αντικατάσταση προκύπτει ότι την $t=0$

$$\omega^2 A = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = -A$$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $-A$ και ξεκινά με μηδενική ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα θετικά. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα (II).

Ερώτηση 33.

Στο διπλανό διάγραμμα (σχήμα α) δείχνεται η ασκούμενη δύναμη F σε συνάρτηση με την προκαλούμενη παραμόρφωση x για δύο ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 . Τα δύο ελατήρια έχουν τα πάνω άκρα τους στερεωμένα ακλόνητα στην οροφή και στα κάτω άκρα τους έχουν δεμένα σώματα Σ_1 και Σ_2 μαζών m_1 και $m_2=2m_1$ αντίστοιχα.



Εκτρέπουμε τα σώματα κατακόρυφα, ώστε τα ελατήρια να βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος (σχήμα β) και τα αφήνουμε ελεύθερα να ταλαντωθούν. Ο λόγος των ενεργειών ταλάντωσης $\frac{E_1}{E_2}$ των δύο συστημάτων, είναι

α. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2}$.

β. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$.

γ. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{8}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ενέργεια ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας- ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2} k A^2$.

Από το διάγραμμα δύναμης - παραμόρφωσης, για τη σταθερά κάθε ελατηρίου έχουμε:

$$k_1 = \frac{F_0}{x_1}, \quad k_2 = \frac{F_0}{2x_1} = \frac{k_1}{2} \quad \text{ή} \quad k_1 = 2k_2$$

Όταν ελευθερώσουμε τα σώματα από τις θέσεις φυσικού μήκους των ελατηρίων, τότε οι αποστάσεις από τις θέσεις αυτές μέχρι τις θέσεις ισορροπίας αντιστοιχούν στα πλάτη ταλαντώσεών τους.

Από τις συνθήκες ισορροπίας για τα δύο σώματα παίρνουμε:

$$m_1 g = k_1 A_1 \quad \text{ή} \quad A_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \quad , \quad (1)$$

$$m_2 g = k_2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{2m_1 g}{k_1 / 2} \quad \text{ή} \quad A_2 = 4A_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 A_1^2}{\frac{1}{2} k_2 A_2^2} = \frac{k_1 A_1^2}{\frac{k_1}{2} (4A_1)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{8}$$

Ερώτηση 34.

Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης με θετική ταχύτητα μέτρου $v_{\max}$. Το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη στιγμή $t=0$ μέχρι τη στιγμή $T/12$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης είναι

α. $-\frac{1}{2}mv_{\max}^2$.

β. $-\frac{1}{8}mv_{\max}^2$.

γ. $-\frac{3}{4}mv_{\max}^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

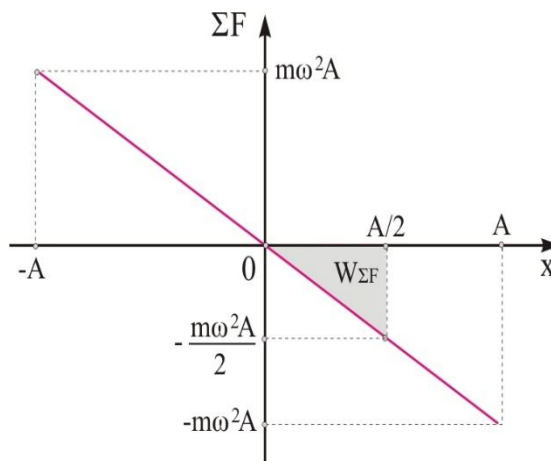
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του και δίνεται από τη σχέση

$$\Sigma F = -m\omega^2 x, \quad (1)$$

Η δύναμη επαναφοράς είναι δύναμη μεταβλητού μέτρου και το έργο της υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής της παράστασης και του άξονα της μετατόπισης στο διάγραμμα δύναμης - μετατόπισης. Πρέπει να βρούμε τη δύναμη τη χρονική στιγμή $T/12$.



$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}\right) = A \sin\frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \frac{A}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου $x=A/2$, παίρνουμε

$$\Sigma F = -\frac{m\omega^2 A}{2}$$

Άρα, το έργο της δύναμης επαναφοράς στο ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι:

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} \left(-\frac{m\omega^2 A}{2} \right) \frac{A}{2} = -\frac{1}{8} m \omega^2 A^2 = -\frac{1}{8} m v_{\max}^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Σε ένα ρολόι θέλουμε το άκρο του ωροδείκτη και το άκρο του λεπτοδείκτη να έχουν την ίδια ταχύτητα λόγω περιστροφής (γραμμική ταχύτητα). Αν συμβολίσουμε με ℓ_{ω} το μήκος του ωροδείκτη και με ℓ_{λ} το μήκος του λεπτοδείκτη, τότε για το λόγο των μηκών ισχύει

α) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 1$

β) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = \frac{1}{12}$

γ) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

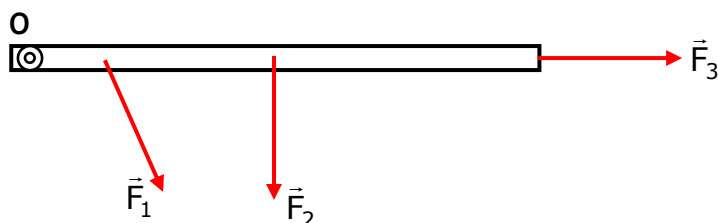
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι γραμμικές ταχύτητες των δύο άκρων δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $v_{\omega} = \omega_{\omega} \ell_{\omega}$ και $v_{\lambda} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda}$. Παίρνοντας υπόψη ότι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και ότι $T_{\omega} = 12h$, $T_{\lambda} = 1h$ προκύπτει:

$$v_{\omega} = v_{\lambda} \Rightarrow \omega_{\omega} \ell_{\omega} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_{\omega}} \ell_{\omega} = \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = \frac{T_{\omega}}{T_{\lambda}} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$$

Ερώτηση 2.

Στη ράβδο του σχήματος ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις ίσου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων.



Η κατάταξη των δυνάμεων, κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται, είναι:

α) $\vec{F}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

β) $\vec{F}_3, \vec{F}_2, \vec{F}_1$.

γ) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

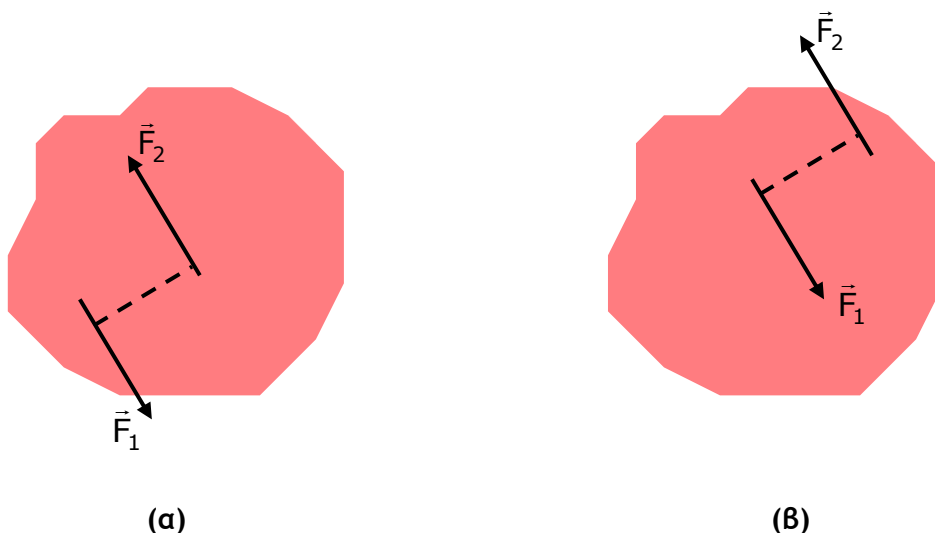
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Το μέτρο της ροπής δύναμης ως προς σταθερό άξονα δίνεται από τον τύπο: $\tau = F \cdot L$, όπου F το μέτρο της δύναμης (κοινό για τις τρεις δυνάμεις) και L η απόσταση του φορέα τους από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας). Από το σχήμα φαίνεται ότι η δύναμη $\vec{F}_3$ έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα, επομένως δεν ασκεί ροπή. Επίσης, η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μικρότερο μοχλοβραχίονα από τη δύναμη $\vec{F}_2$, οπότε ασκεί μικρότερη ροπή. Επομένως, η κατάταξη των δυνάμεων, κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται, είναι: $\vec{F}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

Ερώτηση 3.

Στο σχήμα (α) φαίνεται ένα ελεύθερο στερεό, το οποίο στρέφεται υπό την επίδραση του ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



Αν μετακινήσουμε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετακινώντας παράλληλα τους φορείς των δυνάμεων, όπως φαίνεται στο σχήμα (β), χωρίς να μεταβάλλουμε τη μεταξύ τους απόσταση, τότε το στερεό:

- α) στρέφεται όπως και στο σχήμα α.
- β) στρέφεται αντίστροφα από το σχήμα α.
- γ) ισορροπεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή ζεύγους δύναμης είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και εξαρτάται μόνο από το μέτρο των δυνάμεων και την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Στο σχήμα (β) δεν έχουμε μεταβάλλει ούτε το μέτρο των δυνάμεων, ούτε την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Επομένως, η ράβδος στο σχήμα (β), υπό την επίδραση της ίδιας ροπής του ζεύγους δύναμης, θα κάνει ό,τι έκανε και στο σχήμα (α), δηλαδή, θα στρέφεται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Ερώτηση 4.

Μια ρόδα αυτοκινήτου ακτίνας R κυλίζει με το κέντρο μάζας της να έχει σταθερή ταχύτητα $υ$. Ένα μικρό καρφί μάζας m είναι καρφωμένο στην εξωτερική επιφάνεια της ρόδας. Αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις του καρφιού αμελητέες, τότε η μεταβολή της ορμής του καρφιού, μεταξύ κατώτερης και ανώτερης θέσης

α) είναι mu .

β) είναι μηδέν.

γ) έχει μέτρο ίσο με $2mu$.

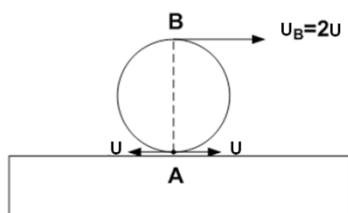
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

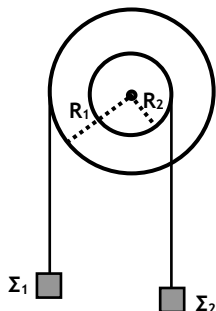
Επειδή η ρόδα κυλίζει η ταχύτητα του καρφιού όταν περνά από την κατώτερη θέση (όταν είναι σε επαφή με το έδαφος) είναι μηδέν, ενώ όταν το καρφί διέρχεται από το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ταχύτητα $2υ$. Έτσι, το καρφί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ορμή μέτρου 0 και στο ψηλότερο σημείο έχει ορμή μέτρου $p = 2mu$.

Συνεπώς, η μεταβολή της ορμής του μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων θα έχει μέτρο $|\Delta \vec{p}| = |\vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}| = |2mu - 0| \Rightarrow |\Delta \vec{p}| = 2mu$ και οριζόντια διεύθυνση, δηλαδή θα έχει ίδια κατεύθυνση με αυτήν της ταχύτητας που έχει στο ψηλότερο σημείο.



Ερώτηση 5.

Στο σχήμα φαίνεται μια διπλή τροχαλία, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και δύο μικρά σώματα Σ_1 και Σ_2 , τα οποία αναρτώνται από τη διπλή τροχαλία. Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει



α) το Σ_1 να είναι βαρύτερο από το Σ_2 .

β) το Σ_2 να είναι βαρύτερο από το Σ_1 .

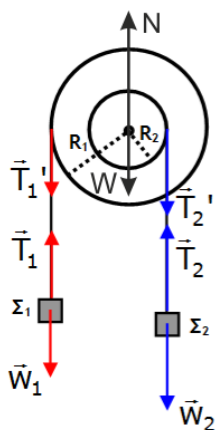
γ) το Σ_1 να έχει ίσο βάρος με το Σ_2 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα Σ_1 και Σ_2 και οι δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία. Από τις δυνάμεις αυτές ροπή προκαλούν οι $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2'$.



Επειδή τα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν, από τη σχέση $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ έχουμε:

$$T_1 = w_1$$

$$T_2 = w_2$$

Για τις δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2$, $\vec{T}_2'$ ισχύει: $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$.

Επειδή η διπλή τροχαλία ισορροπεί στρωφικά, από τη σχέση $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ έχουμε:

$$T_1' R_1 = T_2' R_2 \Rightarrow T_1 R_1 = T_2 R_2 \Rightarrow w_1 R_1 = w_2 R_2 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

και επειδή $R_1 > R_2$ έχουμε: $w_2 > w_1$.

Ερώτηση 6.

Σε ένα ελεύθερο στερεό ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο κέντρο μάζας του στερεού. Το στερεό ισορροπεί. Αν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, το στερεό θα εκτελέσει:

- α) μεταφορική κίνηση.
- β) στροφική κίνηση.
- γ) σύνθετη κίνηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι δυνάμεις που αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Για τις δυνάμεις αυτές ισχύει $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ άρα για τα μέτρα τους ισχύει:

$$F_2 = F_1 \quad (=F).$$

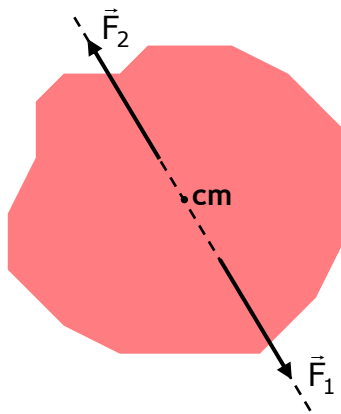
Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και έχει μέτρο:

$$\Sigma \tau = F \cdot d, \text{ όπου } d \text{ η απόσταση των φορέων των δυνάμεων } \vec{F}_1 \text{ και } \vec{F}_2.$$

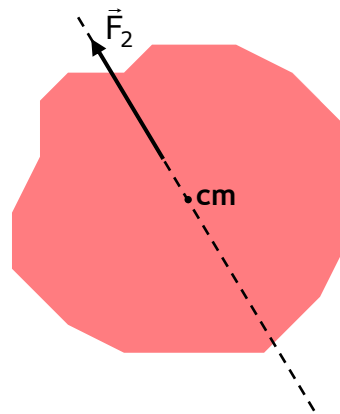
Επειδή αρχικά το στερεό ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \Sigma \tau = F \cdot d = 0$$

Επειδή $F \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι $d = 0$, δηλαδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι συγγραμμικές. Επομένως, ο φορέας της $\vec{F}_2$ διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού, όπως φαίνεται στο σχήμα (α):



(α)

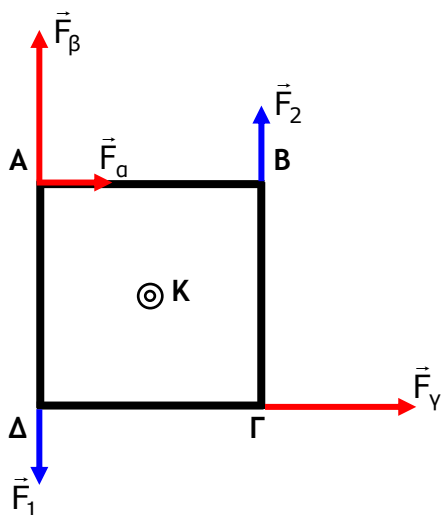


(β)

Όταν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, επειδή η δύναμη $\vec{F}_2$ δεν ασκεί ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, το στερεό θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση στην κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_2$, (βλέπε σχήμα β).

Ερώτηση 7.

Η τετράγωνη πλάκα ΑΒΓΔ πλευράς α του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Κ και είναι κάθετος σε αυτή. Στην πλάκα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα $F_1 = F_2 (= F)$.



Η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο στερεό για να ισορροπεί είναι:

α) η δύναμη $\vec{F}_\alpha$, μέτρου $F_\alpha = F$.

β) η δύναμη $\vec{F}_\beta$, μέτρου $F_\beta = 2F$.

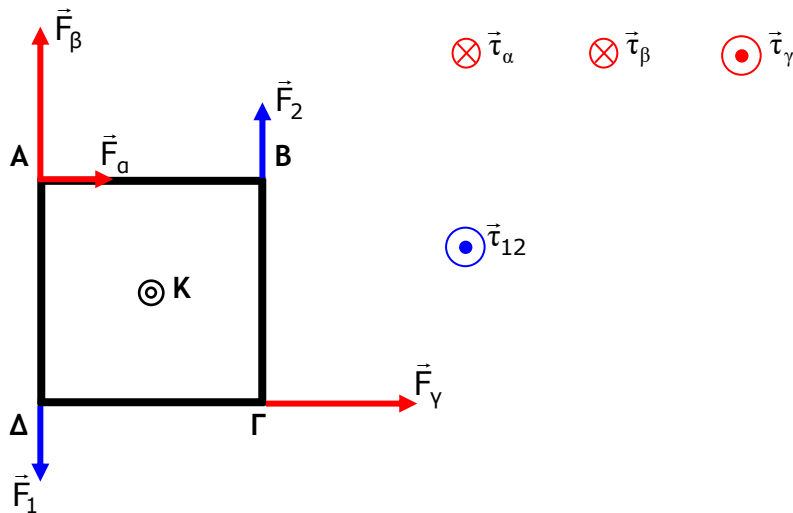
γ) η δύναμη $\vec{F}_\gamma$, μέτρου $F_\gamma = 2F$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Για να ισορροπεί ένα στερεό που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, πρέπει να ισχύει $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Κ ώστε να μηδενιστεί η ροπή της δύναμης που ασκεί ο ακλόνητος άξονας περιστροφής. Στο σχήμα φαίνονται οι κατευθύνσεις των ροπών:



Από τις κατευθύνσεις των ροπών φαίνεται ότι η δύναμη $\vec{F}_\gamma$ δε μπορεί να ισορροπήσει την πλάκα, διότι ασκεί ομόρροπη ροπή με τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Για τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων $\vec{F}_\alpha$ και $\vec{F}_\beta$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\tau_\alpha = F_\alpha \cdot \frac{(A\Delta)}{2} \Rightarrow \tau_\alpha = F \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$\tau_\beta = F_\beta \cdot \frac{(AB)}{2} \Rightarrow \tau_\beta = 2F \cdot \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tau_\beta = F \cdot \alpha$$

Για το μέτρο της συνολικής ροπής των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουμε:

$$\tau_{12} = F \cdot \frac{(AB)}{2} + F \cdot \frac{(AB)}{2} \Rightarrow \tau_{12} = F \cdot \alpha$$

Επομένως, η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο στερεό για να ισορροπεί είναι η δύναμη $\vec{F}_\beta$, επειδή ασκεί αντίθετη ροπή από τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Ερώτηση 8.

Η αβαρής δοκός AB του σχήματος (α) στηρίζεται σε ένα σημείο της O και ισορροπεί όταν στα άκρα της A και B τοποθετηθούν δύο μικρά σώματα Σ και Σ₁ με μάζες m και m₁.



Αν η απόσταση (OA) είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της απόστασης (AB), ο λόγος $\frac{m}{m_1}$ είναι ίσος με

α) 1.

β) 2.

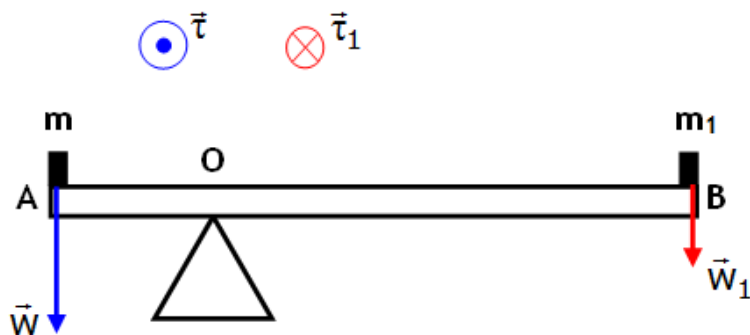
γ) $\frac{1}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή τα σώματα ισορροπούν πάνω στη δοκό, της ασκούν δυνάμεις ίσες με τα αντίστοιχα βάρη τους. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στη δοκό, ως προς το σημείο O:



Επειδή η δοκός ισορροπεί ισχύει $\Sigma \tau = 0$. Ως προς το σημείο O έχουμε:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau = \tau_1 \Rightarrow w(OA) = w_1(OB) \quad (1)$$

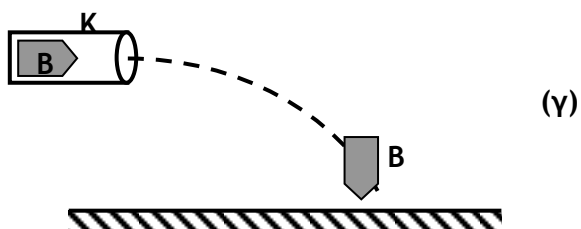
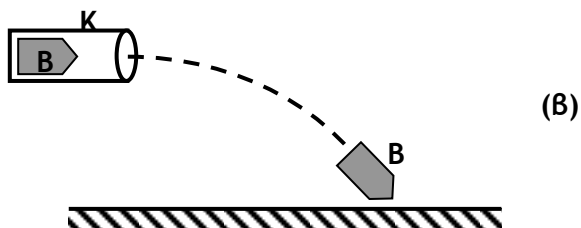
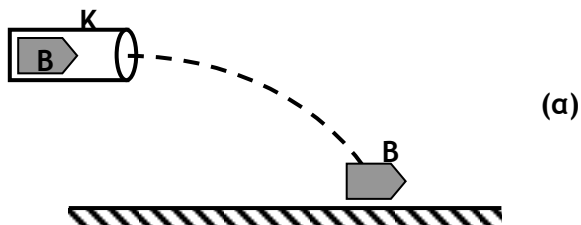
Όμως $(OA) + (OB) = (AB)$ και $(OA) = \frac{1}{3}(AB)$. Από το συνδυασμό των δύο σχέσεων προκύπτει $(OB) = 2 \cdot (OA)$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$mg(OA) = m_1 g 2(OA) \Rightarrow \frac{m}{m_1} = 2$$

Ερώτηση 9.

Από το κανόνι Κ εκτοξεύεται οριζόντια ένα βλήμα Β. Το βλήμα, ακολουθώντας παραβολική τροχιά, φτάνει στο έδαφος. Αγνοώντας την επίδραση του αέρα, και θεωρώντας το βλήμα ελεύθερο στερεό, το σχήμα που δείχνει σωστά τον τρόπο με τον οποίο το βλήμα συναντά το έδαφος είναι:



α) το σχήμα α.

β) το σχήμα β.

γ) το σχήμα γ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

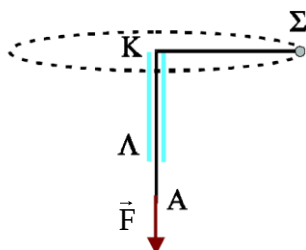
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Το βλήμα ως ελεύθερο στερεό μπορεί να περιστραφεί μόνο γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Από τη στιγμή που το βλήμα Β φεύγει από το κανόνι, μέχρι να φτάσει στο έδαφος, η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος του. Επειδή ο φορέας του βάρους περνά από το κέντρο μάζας του βλήματος δεν ασκεί ροπή, επομένως δε μπορεί να το στρέψει. Αφού στο βλήμα δεν ασκούνται ροπές ικανές να το στρέψουν, θα φτάσει στο έδαφος με τον αρχικό προσανατολισμό του, εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση.

Ερώτηση 10.

Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος διαγράφει κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ακτίνας R. Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ.



Ασκώντας κατάλληλη δύναμη στο ελεύθερο άκρο Α του σκοινιού μειώνουμε την ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου στη μισή της αρχικής. Το σφαιρίδιο θα περιστρέφεται:

- α) πιο γρήγορα.
- β) πιο αργά.
- γ) το ίδιο γρήγορα με πριν.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η τάση του νήματος, που λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη για το σφαιρίδιο, έχει φορέα που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, δεν ασκεί ροπή, επομένως η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής διατηρείται:

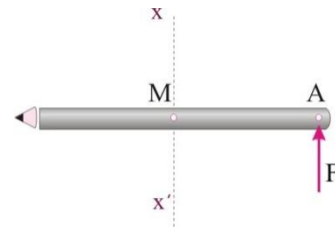
$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_{\alpha\rho\chi} R = m v_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\tau\epsilon\lambda} = 2 v_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$$

$$\omega_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} = 2 \omega_{\alpha\rho\chi} R \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = 4 \omega_{\alpha\rho\chi}$$

Άρα θα κινείται πιο γρήγορα.

Ερώτηση 11.

Το μολύβι του σχήματος μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Ασκούμε την ίδια δύναμη F δύο φορές, μία στο άκρο A και μία στο μέσο M . Το κέντρο μάζας του μολυβιού θα διανύσει το μήκος του τραπεζιού



- α. σε μικρότερο χρόνο όταν η δύναμη ασκείται στο μέσον M .
- β. σε μικρότερο χρόνο όταν η δύναμη ασκείται στο άκρο A .
- γ. στον ίδιο χρόνο και στις δύο περιπτώσεις.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (γ).

Για τη μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός σώματος θεωρούμε ότι οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας. Έτσι, στις δύο περιπτώσεις το κέντρο μάζας δέχεται την ίδια συνισταμένη δύναμη, $\Sigma F_{\text{cm}} = F$, οπότε θα αποκτήσει και την ίδια

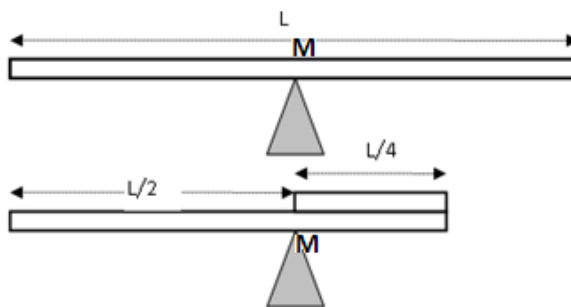
επιτάχυνση, $a_{\text{cm}} = F/m$. Συνεπώς διανύει την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο,

$$\Delta x_{\text{cm}} = \frac{1}{2} a_{\text{cm}} \cdot t^2.$$

Ερώτηση 12.

Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος w και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στο μέσο της.

Κόβουμε το ένα τέταρτο της ράβδου και το τοποθετούμε όπως στο σχήμα. Χωρίς να αλλάξουμε τη θέση του στηρίγματος, για να ισορροπήσει η ράβδος πάλι, πρέπει να ασκήσουμε στο αριστερό άκρο μια δύναμη κατακόρυφη



α προς τα πάνω μέτρου $w/4$.

β προς τα πάνω μέτρου $w/8$.

γ. προς τα κάτω μέτρου $w/8$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (β).

Η ροπή του βάρους του αριστερού τμήματος της ράβδου ως προς το στηρίγμα (μέσο M) παραμένει σταθερή στις δύο περιπτώσεις και ίση κατά μέτρο με $\tau_1 = \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{4}$

Στο δεξιό τμήμα της ράβδου, στην δεύτερη περίπτωση, η ροπή ως προς το M έχει μέτρο $\tau_2 = \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8}$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει πως κατά μέτρο έχουμε $\tau_1 = 2 \cdot \tau_2$

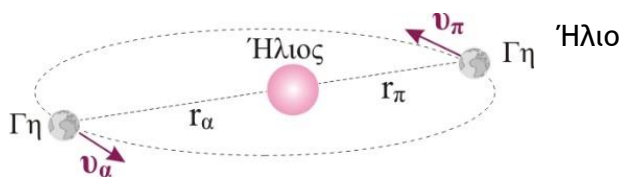
Για να ισορροπήσει η ράβδος θα πρέπει στο αριστερό άκρο της να ασκηθεί κατακόρυφη δύναμη με ροπή ως προς το M ίδιας φοράς με αυτήν της τ_2 και μέτρου

$$\frac{w}{2} \cdot \frac{L}{4} - \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8} = \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8}$$

$$\text{Άρα, } \tau_F = F \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8} = F \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow F = \frac{w}{8}$$

Ερώτηση 13.

Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον σε ελλειπτική τροχιά και η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η δύναμη βαρύτητας, F_g , από αυτόν. Αν η ελάχιστη (περιήλιο) και η μέγιστη (αφήλιο) απόσταση της Γης από τον Ήλιο κατά τη διάρκεια της ελλειπτικής της τροχιάς



ικανοποιούν τη σχέση $r_π = \frac{9}{10} r_α$, τότε η κινητική της ενέργεια όταν βρίσκεται στο αφήλιο ($K_α$) και η κινητική της ενέργεια όταν βρίσκεται στο περιήλιο ($K_π$) ικανοποιούν τη σχέση

α. $K_π = \frac{100}{81} K_α$.

β. $K_π = \frac{100}{90} K_α$.

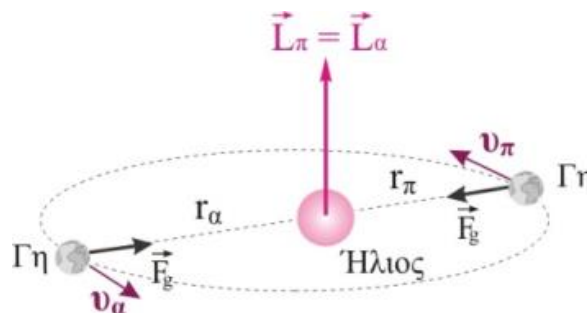
γ. $K_π = K_α$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Η βαρυτική δύναμη είναι δύναμη κεντρική, δηλαδή έχει φορέα που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς της και από τον Ήλιο. Οπότε σε αυτήν κίνηση της Γης η συνολική ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς της είναι ίση με μηδέν ($\Sigma \tau = 0$) με συνέπεια η στροφορμή της να διατηρείται σταθερή.



Θεωρώντας τη Γη ως υλικό σημείο σε σχέση με τον Ήλιο έχουμε:

$$L_π = L_α \Rightarrow m v_π r_π = m v_α r_α \Rightarrow m \omega_π r_π^2 = m \omega_α r_α^2 \Rightarrow \omega_π r_π^2 = 16 \omega_α r_π^2 \Rightarrow$$

$$\omega_π = 16 \omega_α$$

Η σχέση της κινητικής ενέργειας γράφεται:

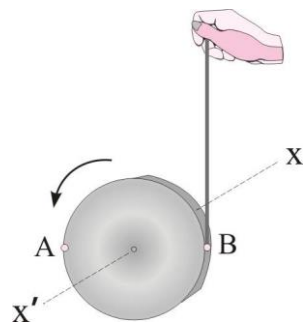
$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2, \text{ οπότε ο λόγος των κινητικών ενεργειών θα είναι:}$$

$$\frac{K_{\pi}}{K_{\alpha}} = \frac{\frac{1}{2} m r_{\pi}^2 \omega_{\pi}^2}{\frac{1}{2} m r_{\alpha}^2 \omega_{\alpha}^2} = \frac{r_{\pi}^2 16^2 \omega_{\alpha}^2}{16 r_{\pi}^2 \omega_{\alpha}^2} = 16.$$

Ερώτηση 14.

Το γιο - γιο του σχήματος αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R , στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές νήμα.

Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνοντας τον κύλινδρο ελεύθερο, το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος κατεβαίνει περιστρεφόμενος γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$ που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι v_{cm} , τότε η ταχύτητα του σημείου A , το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια του κυλίνδρου, είναι



α. v_{cm}

β. $2v_{cm}$

γ. 0

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

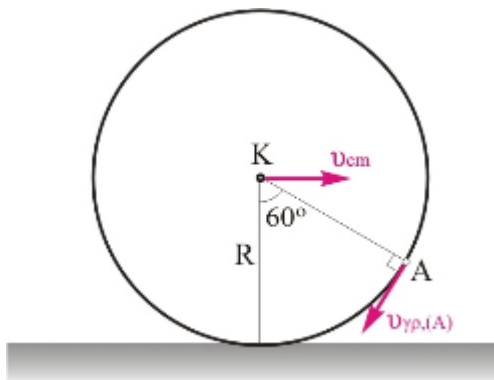
Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (β).

Κρατώντας ακίνητο το άκρο του νήματος ($v_B = 0$) ο κύλινδρος κινείται προς τα κάτω κάνοντας κύλιση χωρίς ολίσθηση, για την οποία θα ισχύει $v_{cm} = \omega \cdot R$. Σε κάθε σημείο του κυλίνδρου η ταχύτητα θα προκύπτει από την διανυσματική πρόσθεση της συνιστώσας ταχύτητας λόγω μεταφορικής κίνησης (v_{cm}) και της γραμμικής (εφαπτομενικής) συνιστώσας ταχύτητας λόγω στροφικής κίνησης ($v_{\gamma p} = \omega \cdot R$), δηλαδή θα ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma p}$. Στο σημείο A οι δύο συνιστώσες ταχύτητες έχουν την ίδια φορά οπότε $v_A = 2 \cdot v_{cm}$.

Ερώτηση 15.

Ο δίσκος του σχήματος, με ακτίνα R , κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) σε οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του K είναι v_{cm} . Το σημείο A του δίσκου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει ταχύτητα με μέτρο



α. v_{cm}

β. $2v_{cm}$

γ. $3/2 v_{cm}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

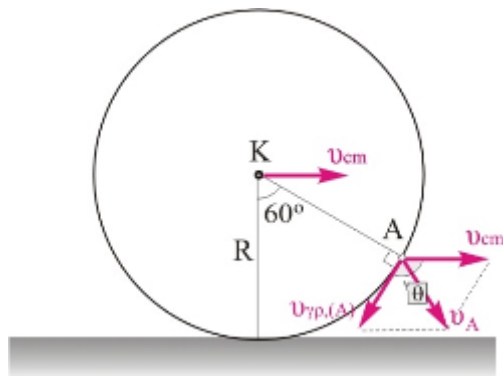
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το σημείο A του δίσκου έχει γραμμική ταχύτητα $v_{gp,A}$, η οποία έχει μέτρο ίσο με τη v_{cm} . Για να βρούμε τη συνολική ταχύτητα του σημείου A , v_A , θα βρούμε τη συνισταμένη των δύο ταχυτήτων v_{cm} και $v_{gp,A}$. Οι δύο επιμέρους ταχύτητες σχηματίζουν γωνία θ , που ισούται με 120° , γιατί τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται στο παραλληλόγραμμο είναι ισόπλευρα. Έτσι έχουμε

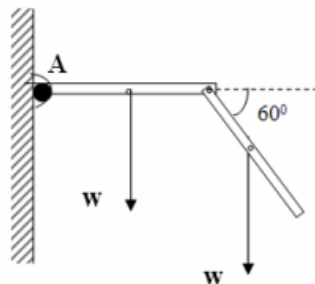
$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{gp,A}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{gp,A} \cdot \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{cm} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{v_{cm}^2} = v_{cm}$$



Ερώτηση 16.

Δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m , είναι ενωμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα και το σύστημά τους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση Α σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν g η επιτάχυνση της βαρύτητας, το μέτρο της συνολικής ροπής που δέχεται το σύστημα των ράβδων είναι



α. $\Sigma\tau = \frac{5mg\ell}{3}$.

β. $\Sigma\tau = \frac{7mg\ell}{4}$.

γ. $\Sigma\tau = 2mg\ell$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

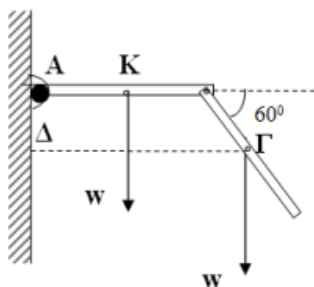
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Οι ράβδοι έχουν ίσα βάρη, με μοχλοβραχίονες ως προς το Α, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα

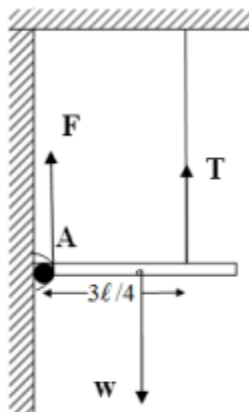
$$\Sigma\tau = w \cdot (AK) + w \cdot (AG) \Rightarrow$$

$$\Sigma\tau = mg \frac{\ell}{2} + mg \left(\ell + \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ \right) = mg \frac{\ell}{2} + mg \left(\ell + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = mg \frac{\ell}{2} + mg \frac{5\ell}{4} = \frac{7mg\ell}{4}.$$



Ερώτηση 17.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ και βάρους w , είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α και το σκοινί είναι δεμένο σε απόσταση $3\ell/4$ από το Α. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση. Η δύναμη F που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει μέτρο ίσο με



α. $\frac{2w}{3}$

β. $\frac{w}{3}$

γ. $\frac{w}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το σύστημα ισορροπεί, άρα θα ισχύει $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau_{(A)} = 0$.

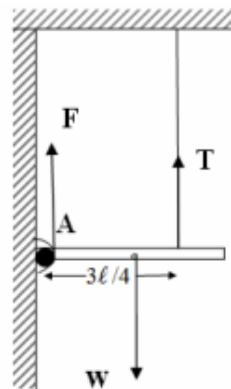
Η πρώτη σχέση δίνει

$$F + T = w \quad (1)$$

και η δεύτερη

$$\tau_{T(A)} + \tau_{w(A)} = 0 \Rightarrow T \cdot \frac{3\ell}{4} - w \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{2}{3}w.$$

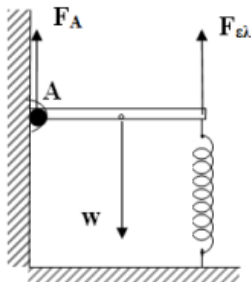
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε



$$F + \frac{2}{3}w = w \Rightarrow F = \frac{w}{3} .$$

Ερώτηση 18.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ και βάρους w , είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο είναι κατακόρυφο. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση και η δύναμη του ελατηρίου συνδέονται με τη σχέση



α. $F_{ελ} = F_A$.

β. $F_{ελ} = 3F_A$.

γ. $F_{ελ} = 2F_A$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το σύστημα ισορροπεί, άρα θα ισχύει $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau_{(A)} = 0$.

Η πρώτη σχέση δίνει

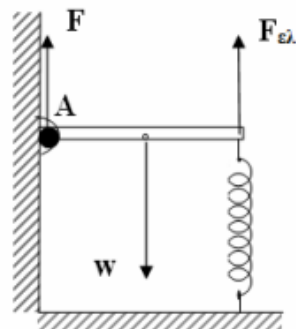
$$F_A + F_{ελ} = w \quad (1)$$

και η δεύτερη σχέση ισορροπίας δίνει

$$\tau_{F_{ελ}(A)} + \tau_{w(A)} = 0 \Rightarrow F_{ελ} \cdot \ell - w \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = \frac{w}{2}.$$

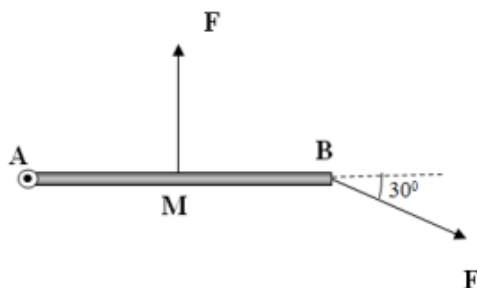
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε

$$F_A + \frac{w}{2} = w \Rightarrow F_A = \frac{w}{2}, \text{ δηλαδή } F_{ελ} = F_A.$$



Ερώτηση 19.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α, βρίσκεται ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στη ράβδο ασκούνται ταυτόχρονα δύο οριζόντιες δυνάμεις F με το ίδιο μέτρο. Η μία δύναμη ασκείται στο κέντρο της ράβδου, ενώ η άλλη στο άκρο της, όπως στο σχήμα.



Η ράβδος θα

- α. περιστραφεί σε φορά όπως οι δείκτες του ρολογιού.
- β. περιστραφεί σε φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.
- γ. παραμείνει ακίνητη.

$$\Deltaίνεται \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

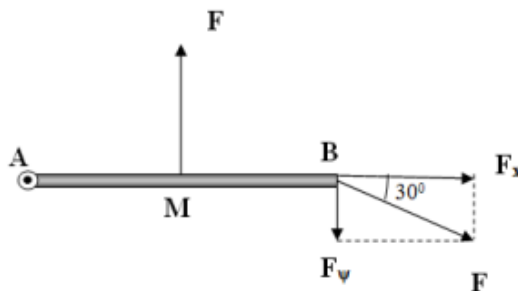
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Παίρνοντας ως θετική φορά την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, η συνολική ροπή των δύο δυνάμεων είναι:

$$\Sigma\tau = F \cdot (AM) - F_{\psi} \cdot (AB)$$

Η συνιστώσα F_x δεν έχει ροπή ως προς το σημείο Α.



$$\text{Άρα } \Sigma\tau = F \frac{\ell}{2} - F\eta\mu 30^\circ \cdot \ell = F \frac{\ell}{2} - F \cdot \frac{\ell}{2} = 0.$$

Η ράβδος ήταν αρχικά ακίνητη και έτσι θα παραμείνει.

Ερώτηση 20.

Ο τροχός του σχήματος ακτίνας R κυλίζει σε οριζόντιο επίπεδο. Τα σημεία A και Γ ανήκουν στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχουν r από το κέντρο μάζας του τροχού. Αν ο λόγος των

μέτρων των ταχυτήτων των σημείων A και Γ , είναι $\frac{v_A}{v_\Gamma} = 3$, τότε ο

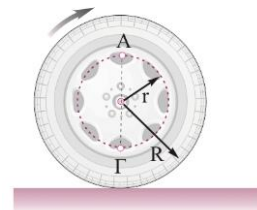
λόγος $\frac{r}{R}$ είναι

α. $1/2$.

β. $1/3$.

γ. $1/4$.

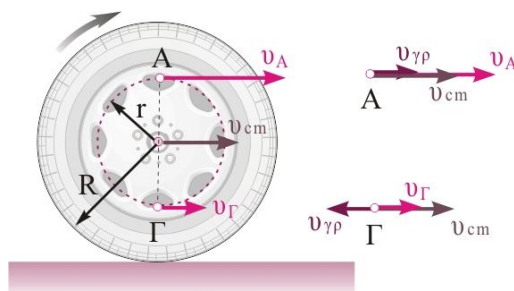
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα δύο ταχυτήτων. Την ταχύτητα v_{cm} λόγω μεταφοράς και την γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\rho}$ της οποίας το μέτρο εξαρτάται από την απόσταση r .



Για το σημείο A έχουμε: $v_A = v_{cm} + \omega r$, (1)

Για το σημείο Γ έχουμε: $v_\Gamma = v_{cm} - \omega r$, (2)

Ο τροχός κυλίζει επομένως ισχύει $v_{cm} = \omega R$ ή $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$, (3)

Αντικαθιστώντας την (3) στις (1),(2) παίρνουμε

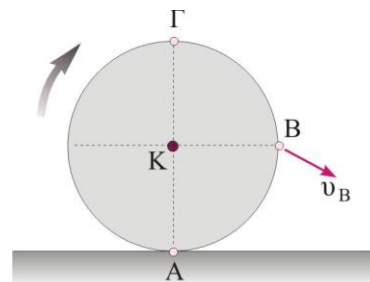
$$v_A = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} r \quad (4), \quad v_\Gamma = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} r \quad (5)$$

Από την εκφώνηση έχουμε

$$\frac{v_A}{v_\Gamma} = 3 \quad \text{ή} \quad \frac{v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} r}{v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} r} = 3 \quad \text{ή} \quad \frac{1 + \frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}} = 3 \quad \text{ή} \quad \frac{R+r}{R-r} = 3 \quad \text{ή} \quad 4r = 2R \quad \text{ή} \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 21.

Ο κατακόρυφος τροχός του σχήματος κινείται στο οριζόντιο δάπεδο εκτελώντας μεταφορική και στροφική κίνηση (δεν κυλίεται). Κάποια στιγμή, που το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου του K είναι $v_{cm}=4\text{m/s}$, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B που απέχει R από το έδαφος είναι $v_B=5\text{m/s}$. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A που είναι το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο είναι



α. μηδέν

β. 1 m/s

γ. 3 m/s

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Κάθε σημείο του τροχού εκτελεί σύνθετη κίνηση και η ταχύτητά του είναι το διανυσματικό άθροισμα της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας v_{cm} και της γραμμικής $v_{\gamma\rho}$.

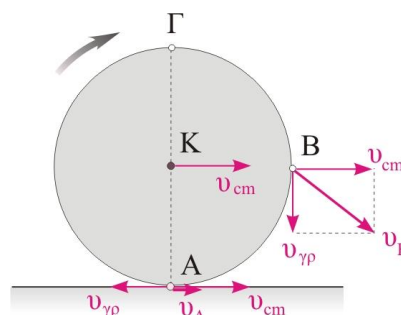
Για το σημείο B ισχύει

$$v_B = \sqrt{v_{\gamma\rho}^2 + v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_{\gamma\rho} = \sqrt{v_B^2 - v_{cm}^2} = \sqrt{5^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 4^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \quad \text{ή}$$

$$v_{\gamma\rho} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για το σημείο A ισχύει

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad v_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ερώτηση 22.

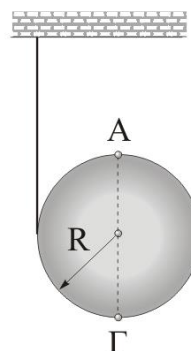
Η τροχαλία του σχήματος έχει τυλιγμένο στο αυλάκι της αβαρές και μη εκτατό νήμα του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερά δεμένο στην οροφή. Αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο και αυτός κατέρχεται ενώ το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να γλυστρά στο αυλάκι του. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ που βρίσκονται στη κατακόρυφη διάμετρο του δίσκου είναι

α. $1/2$.

β. 1.

γ. 2.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Καθώς το νήμα ξετυλίγεται, η τροχαλία εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση

Η ταχύτητα κάθε σημείου του δίσκου είναι $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$

Όπου $v_{\gamma\rho} = \omega R$

Οι επιμέρους ταχύτητες των σημείων Α και Γ είναι κάθετες μεταξύ τους.

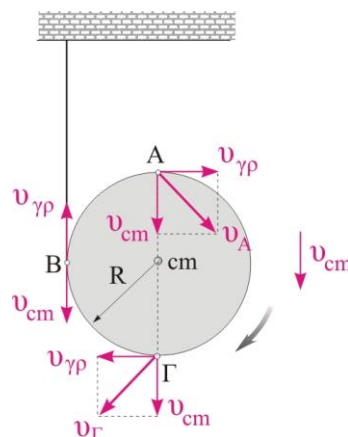
Για το σημείο Α έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_{\gamma\rho}^2 + v_{cm}^2} = \sqrt{2v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_A = v_{cm} \sqrt{2}$$

Για το σημείο Γ:

$$v_{\Gamma} = \sqrt{v_{\gamma\rho}^2 + v_{cm}^2} = \sqrt{2v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_{\Gamma} = v_{cm} \sqrt{2}$$

Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ είναι $\frac{v_A}{v_{\Gamma}} = 1$



Ερώτηση 23.

Η ομογενής οριζόντια ράβδος μήκους L του σχήματος ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε δύο στηρίγματα στα σημεία Α και Γ. Τα στηρίγματα απέχουν από τις άκρες της ράβδου $L/4$ και $L/3$ αντίστοιχα. Ο λόγος των μέτρων των δυνάμεων

$\frac{F_1}{F_2}$ που ασκούνται στη ράβδο από τα στηρίγματα

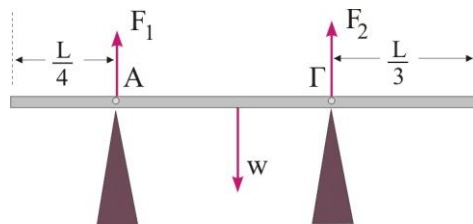
είναι

α. $1/2$.

β. $2/3$.

γ. $1/3$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

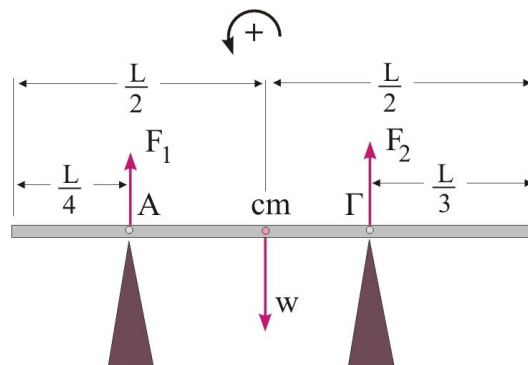
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ράβδος ισορροπεί, επομένως το άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν. Επιλέγουμε το κέντρο μάζας της ράβδου.

$$\Sigma \tau(\text{cm}) = 0 \quad \text{ή}$$

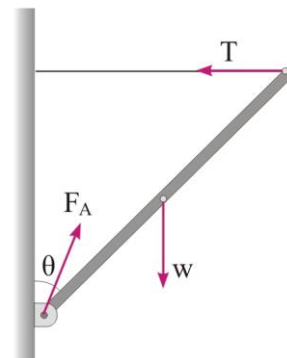
$$F_2 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - F_1 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) = 0 \quad \text{ή}$$

$$F_2 \left(\frac{L}{6} \right) = F_1 \left(\frac{L}{4} \right) \quad \text{ή} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{3}$$



Ερώτηση 24.

Η ομογενής ράβδος βάρους w του σχήματος στηρίζεται στην άρθρωση σχηματίζοντας γωνία $\theta = \pi/4$ με τον κατακόρυφο τοίχο και η άλλη άκρη είναι δεμένη μέσω οριζόντιου μη ελαστικού νήματος με τον τοίχο. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει μέτρο



- α. $\frac{3w}{2}$.
β. $\frac{w}{2}$.
γ. $\frac{w\sqrt{5}}{2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

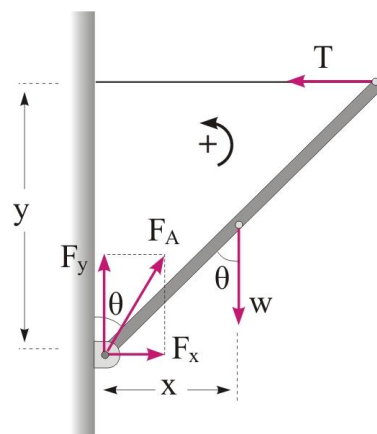
Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Η ράβδος ισορροπεί. Αναλύουμε την F_A στους άξονες x και y παίρνουμε συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα ξεχωριστά.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T, \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = w, \quad (2)$$

Η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν.



Παίρνουμε $\Sigma \tau = 0$ ως προς την άρθρωση.

$$\Sigma \tau = 0 \quad \text{ή} \quad T \cdot y - w \cdot x = 0 \quad \text{ή} \quad T \cdot L \sin \frac{\pi}{4} - w \cdot \frac{L}{2} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{ή} \quad T = \frac{w}{2}$$

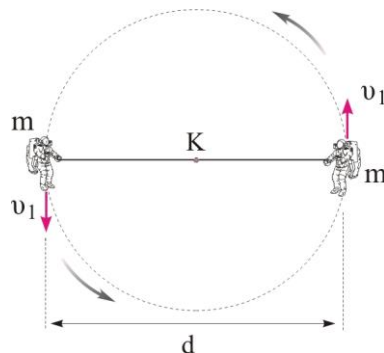
$$\text{Η (1) γίνεται } F_x = \frac{w}{2}$$

Το μέτρο της δύναμης στην άρθρωση είναι

$$F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 + w^2} = \sqrt{\frac{5w^2}{4}} \quad \text{ή} \quad F_A = w \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ερώτηση 25.

Δύο αστροναύτες μάζας m ο καθένας βρίσκονται στο διάστημα έξω από βαρυτικά πεδία και κρατώντας ένα αβαρές και μη εκτατό σχοινί μήκους d περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους K με ταχύτητα μέτρου v_1 . Κάποια στιγμή, τραβούν το σχοινί ώστε η μεταξύ τους απόσταση να γίνει $d/2$, χωρίς να αλλάξει η θέση του κέντρου μάζας K . Το μέτρο, v_2 , της ταχύτητας με την οποία περιφέρονται οι αστροναύτες στην νέα τροχιά είναι



α. $v_2 = v_1$

β. $v_2 = 2v_1$

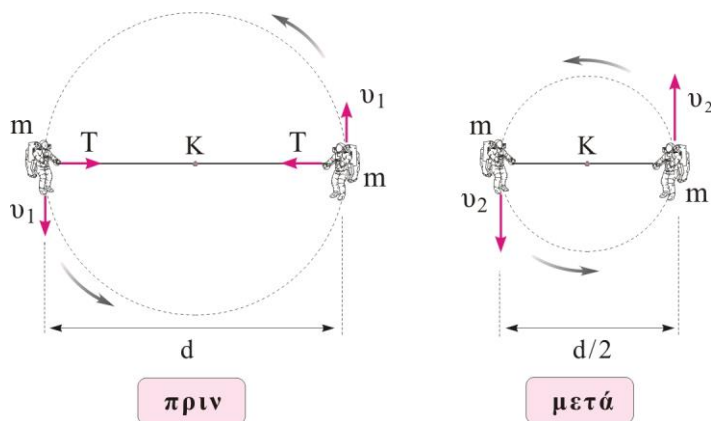
γ. $v_2 = 4v_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Το σύστημα των αστροναυτών είναι μονωμένο (δεν ασκούνται σε αυτούς δυνάμεις από γειτονικά βαρυτικά πεδία) και οι φορείς των δυνάμεων που ασκούνται στο σχοινί όταν το τραβούν διέρχονται από το K , επομένως δεν ασκούνται ροπές στο σύστημα και μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της στροφορμής ως προς το K .

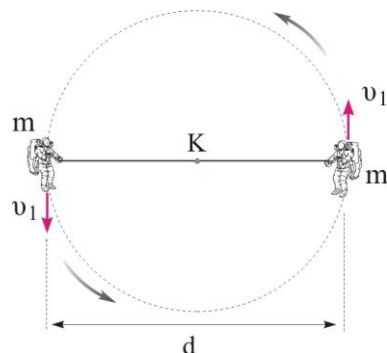


$$L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετά}} \quad \text{ή}$$

$$mv_1 \frac{d}{2} + mv_1 \frac{d}{2} = mv_2 \frac{d}{4} + mv_2 \frac{d}{4} \quad \text{ή} \quad v_1 = \frac{v_2}{2}$$

Ερώτηση 26.

Δύο αστροναύτες μάζας m ο καθένας βρίσκονται στο διάστημα έξω από βαρυτικά πεδία και κρατώντας ένα αβαρές και μη εκτατό σχοινί μήκους d περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους K με ταχύτητα μέτρου v_1 . Κάποια στιγμή, τραβούν το σχοινί ώστε η μεταξύ τους απόσταση να γίνει $d/2$, χωρίς να αλλάξει η θέση του κέντρου μάζας K . Το σύστημα των δύο αστροναυτών αύξησε την κινητική του ενέργεια κατά



α. $\frac{3}{2}mv_1^2$

β. $3mv_1^2$

γ. $\frac{3}{8}mv_1^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Το σύστημα των αστροναυτών είναι μονωμένο και οι φορείς των δυνάμεων που ασκούνται στο σχοινί όταν το τραβούν διέρχονται από το K , επομένως δεν ασκούνται ροπές στο σύστημα και μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της στροφορμής ως προς το K .

$$L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετα}} \quad \text{ή} \quad mv_1 \frac{d}{2} + mv_1 \frac{d}{2} = mv_2 \frac{d}{4} + mv_2 \frac{d}{4} \quad \text{ή} \quad v_2 = 2v_1$$

Το σύστημα των δύο αστροναυτών πριν το τράβηγμα του σχοινιού έχει ολική ενέργεια

$$K_{\text{πριν}} = 2 \frac{1}{2} mv_1^2 = mv_1^2$$

Το σύστημα των δύο αστροναυτών μετά το τράβηγμα του σχοινιού έχει ολική ενέργεια

$$K_{\text{μετα}} = 2 \frac{1}{2} mv_2^2 \xrightarrow{(1)} K_{\text{μετα}} = 2 \frac{1}{2} m(2v_1)^2 = 4mv_1^2$$

Το σύστημα των δύο αστροναυτών αύξησε την κινητική του ενέργεια κατά

$$\Delta K = 4mv_1^2 - mv_1^2 = 3mv_1^2$$

Ερώτηση 27.

Ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω γύρω από κατακόρυφο άξονα και η στροφορμή του ως προς τον άξονα έχει μέτρο L . Για να τετραπλασιάσουμε το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας, διατηρώντας το μέτρο της στροφορμής του σταθερό, η ακτίνα της τροχιάς του πρέπει να

α. διπλασιαστεί.

β. υποδιπλασιαστεί.

γ. υποτετραπλασιαστεί.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση

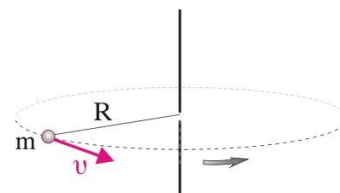
$$L = m\omega R = m\omega R^2$$

Αν διατηρήσουμε το μέτρο της στροφορμής σταθερό ($L'=L$) και τετραπλασιάσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ($\omega'=4\omega$), η ακτίνα R' της κυκλικής τροχιάς γίνεται

$$L' = L \Rightarrow m4\omega R'^2 = m\omega R^2 \Rightarrow R' = \frac{R}{2}$$

Ερώτηση 28.

Το σφαιρίδιο του σχήματος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου v . Αν τετραπλασιαστεί η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου, τότε το μέτρο της στροφορμής του



- α. διπλασιάζεται.
- β. τετραπλασιάζεται.
- γ. οκταπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου δίνεται από τη σχέση $L = mvR$

Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου δίνεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2}mv^2$

Όταν η κινητική ενέργεια K' τετραπλασιαστεί, το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου γίνεται

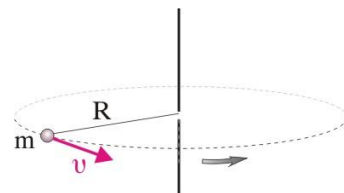
$$K' = 4K \Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 = 4 \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v' = 2v$$

Το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου γίνεται

$$L' = mv'R = m \cdot 2v \cdot R \Rightarrow L' = 2L$$

Ερώτηση 29.

Το σφαιρίδιο του σχήματος μάζας m κινείται σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου v . Για να παραμείνει ο λόγος της κινητικής του ενέργειας προς το μέτρο της στροφορμής του σταθερός, πρέπει να



α. διπλασιάσουμε το μέτρο της ταχύτητάς του και την ακτίνα της τροχιάς του.

β. διπλασιάσουμε το μέτρο της ταχύτητάς του διατηρώντας σταθερή την ακτίνα της τροχιάς του.

γ. διπλασιάσουμε την ακτίνα της τροχιάς του διατηρώντας σταθερό το μέτρο της ταχύτητάς του.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Θέλουμε ο λόγος $\frac{K}{L}$ να είναι σταθερός, άρα

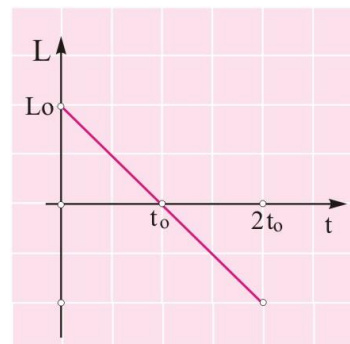
$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mvR} = \text{σταθ.} \quad \text{ή} \quad \frac{v}{2R} = \text{σταθ.}$$

Επομένως, για να διατηρήσουμε το λόγο $\frac{K}{L}$ σταθερό θα πρέπει το πηλίκο $\frac{v}{2R}$ να

παραμείνει σταθερό, άρα να διπλασιάσουμε το μέτρο της ταχύτητας και την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Ερώτηση 30.

Ένα υλικό σημείο μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντια κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας R γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα. Το διάγραμμα που περιγράφει πώς μεταβάλλεται η στροφορμή του σε σχέση με το χρόνο δείχνεται στο διπλανό σχήμα. Στο χρονικό διάστημα από 0 έως τη χρονική στιγμή $2t_0$, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι ίση με μηδέν. Η μεταβολή της στροφορμής του στο ίδιο χρονικό διάστημα έχει μέτρο



α. μηδέν.

β. L_0 .

γ. $2L_0$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Από τη χρονική στιγμή $t=0$ έως τη χρονική στιγμή $2t_0$, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι ίση με μηδέν, επομένως

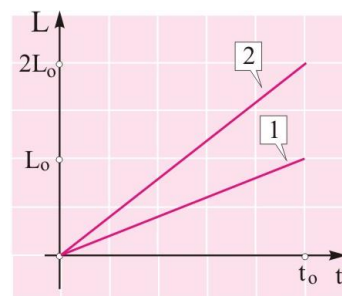
$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow |v'| = |v|$$

Το μέτρο της ταχύτητας τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $2t_0$ είναι το ίδιο, επομένως το μέτρο της στροφορμής είναι το ίδιο. Από το διάγραμμα στροφορμής-χρόνου παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $2t_0$ η στροφορμή είναι αρνητική, επομένως η στροφορμή έχει το ίδιο μέτρο και είναι αντίθετη αυτής που έχει το υλικό σημείο τη στιγμή $t=0$.

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}' - \vec{L} \Rightarrow \Delta L = -L_0 - L_0 = -2L_0 \Rightarrow |\Delta L| = 2L_0$$

Ερώτηση 31.

Δύο σφαιρίδια 1 και 2, κινούνται σε κυκλικές τροχιές ίδιας ακτίνας γύρω από τον ίδιο άξονα και η στροφορμή τους σε συνάρτηση με το χρόνο δείχνεται στο διπλανό διάγραμμα. Για το πηλίκο των μέτρων των ορμών τους, $\frac{p_1}{p_2}$, κάθε χρονική στιγμή ισχύει



α. $\frac{p_1}{p_2} = 1$.

β. $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$.

γ. $\frac{p_1}{p_2} = 2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

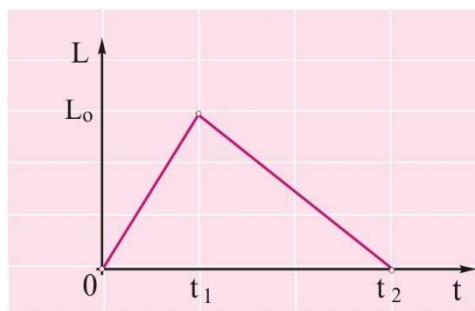
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από το διάγραμμα στροφορμής - χρόνου παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 ,

$$L_2 = 2L_1 \Rightarrow m_2 v_2 R = 2m_1 v_1 R \Rightarrow p_2 R = 2p_1 R \Rightarrow p_2 = 2p_1 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 32.

Ένα σφαιρίδιο μάζας m περιφέρεται σε οριζόντια κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας γύρω από κατακόρυφο άξονα και η αλγεβρική τιμή της στροφορμής του σε συνάρτηση με το χρόνο δείχνεται στο διπλανό διάγραμμα. Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των στροφών που έχει εκτελέσει το σφαιρίδιο στη χρονική διάρκεια t_1-t_2 είναι



διπλάσιος από αυτόν στη χρονική διάρκεια $0-t_1$. Αν α_1 είναι το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σφαιριδίου στη χρονική διάρκεια $0-t_1$ και α_2 είναι το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σφαιριδίου στη χρονική διάρκεια t_1-t_2 , τότε αυτά συνδέονται με τη σχέση

α. $\alpha_1 = \alpha_2$.

β. $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

γ. $\alpha_2 = 2\alpha_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

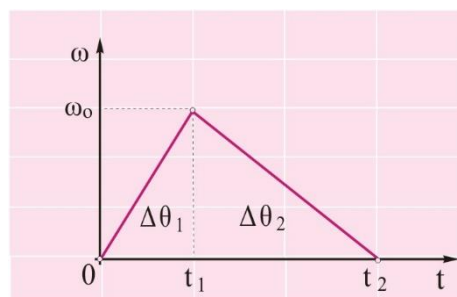
Σωστή απάντηση είναι η β.

Το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου δίνεται από τη σχέση

$$L = mvR = m\omega R^2$$

(1)

Παρατηρούμε ότι η στροφορμή του σφαιριδίου που περιφέρεται σε κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας, επομένως το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας - χρόνου είναι ίδιας μορφής με το διάγραμμα στροφορμής-χρόνου, δηλαδή όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Γνωρίζουμε ότι σε ένα διάγραμμα $\omega-t$ στο εμβαδόν αντιστοιχεί η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$.

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - 0$:

$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \Delta t_1 \omega_0$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1$:

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \Delta t_2 \omega_0$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{N_1 \cdot 2\pi}{N_2 \cdot 2\pi} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \xrightarrow{N_2=2N_1} \Delta t_2 = 2\Delta t_1$$

Η γωνιακή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - 0$ έχει μέτρο

$$\alpha_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta t_1} \quad (1)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ έχει μέτρο

$$\alpha_{\gamma\omega\nu 2} = \frac{\Delta\omega_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta t_2} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) παίρνουμε

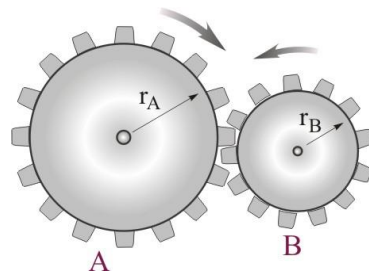
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2$$

Ερώτηση 33.

Οι δίσκοι Α, Β του σχήματος έχουν ακτίνες $r_A=2R$, $r_B=R$ αντίστοιχα. Οι δίσκοι φέρουν γρανάζια και στρέφονται χωρίς τριβές με σταθερές γωνιακές ταχύτητες γύρω από σταθερούς παράλληλους άξονες.

Αν ο δίσκος Α εκτελέσει $N_1=10$ στροφές, τότε ο δίσκος Β θα εκτελέσει

- α. 5 στροφές.
- β. 10 στροφές.
- γ. 20 στροφές.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή τα γρανάζια στρέφονται χωρίς τριβές και μπλέκονται το ένα μέσα στο άλλο, οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων της περιφέρειας των δύο δίσκων είναι ίσες.

$$v_A = v_B \Rightarrow \omega_A r_A = \omega_B r_B \Rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} 2R = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} R \Rightarrow \Delta\theta_1 2 = \Delta\theta_2$$

$$N_1 \cdot 2\pi \cdot 2 = N_2 \cdot 2\pi \Rightarrow N_2 = 2N_1 = 20 \text{ στροφές}$$

Ερώτηση 34.

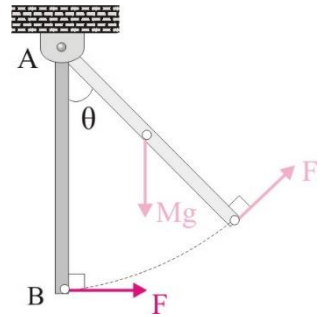
Η ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A . Ασκούμε στο άλλο της άκρο B δύναμη μέτρου $F=Mg/4$ η οποία είναι συνέχεια κάθετη στη ράβδο και την αναγκάζει να στραφεί. Η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο γίνεται ίση με μηδέν για πρώτη φορά, όταν η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ ίση με

α. 30° .

β. 60° .

γ. 90° .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

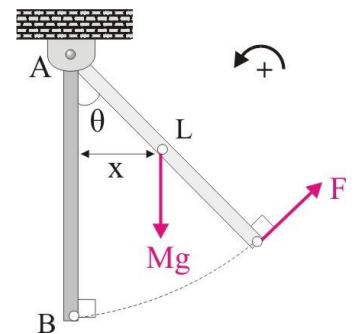
Σωστή απάντηση είναι η α.

Όταν ασκείται η δύναμη F στο άκρο B της ράβδου, αυτή αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το A σχηματίζοντας γωνία θ με την κατακόρυφο. Σε αυτήν, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το A , δημιουργούνται δύο ροπές, αυτή του βάρους η οποία τείνει να τη στρέψει όπως οι δείκτες του ρολογιού και αυτή της δύναμης F η οποία τείνει να τη στρέψει αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.

Στη θέση όπου η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο γίνεται ίση με μηδέν για πρώτη φορά έχουμε:

$$\Sigma_{\tau(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot L - Mg \cdot x = 0 \Rightarrow \frac{Mg}{4} L = Mg \cdot \frac{L}{2} \eta \mu \theta \Rightarrow$$

$$\eta \mu \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



Ερώτηση 35.

Στο διπλανό σχήμα δείχνεται μέρος του πλανητικού μας συστήματος με τη Γη και τον Άρη να περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο. Θεωρούμε ότι οι πλανήτες κινούνται σε κυκλικές τροχιές, με τη Γη να απέχει 1 αστρονομική μονάδα και τον Άρη 1,5 αστρονομική μονάδα από τον Ήλιο. Δεχόμαστε ότι η μάζα της Γης είναι δεκαπλάσια αυτής του Άρη και ο λόγος των περιόδων των κυκλικών κινήσεων των πλανητών είναι

$$\frac{T_A}{T_\Gamma} = 2,2 \text{ .}$$

Αν τα μέτρα των στροφορμών της Γης και του Άρη ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς τους και είναι κάθετος στο επίπεδό της, είναι L_Γ και L_A αντίστοιχα, το πηλίκό τους έχει μέτρο

α. $\frac{L_\Gamma}{L_A} = 2,2 \text{ .}$

β. $\frac{L_\Gamma}{L_A} = \frac{88}{9} \text{ .}$

γ. $\frac{L_\Gamma}{L_A} = 22 \text{ .}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Ο Άρης και η Γη θεωρούνται υλικά σημεία που περιφέρονται κατά προσέγγιση σε κυκλικές τροχιές γύρω από τον ακίνητο Ήλιο. Το μέτρο της στροφορμής τους ως προς τον Ήλιο είναι

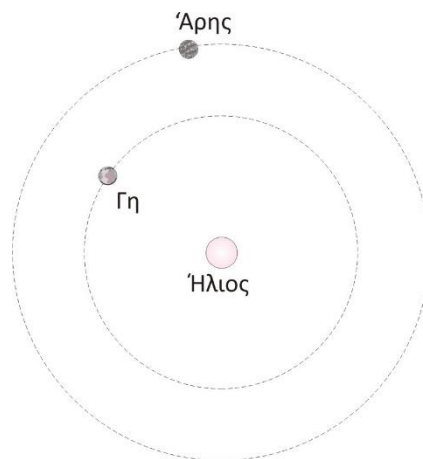
του Άρη: $L_A = M_A v_A r_A \quad (1)$

της Γης: $L_\Gamma = M_\Gamma v_\Gamma r_\Gamma \quad (2)$

Όπου M , v και r είναι η μάζα, το μέτρο της ταχύτητας περιφοράς και η απόσταση του κάθε πλανήτη από τον Ήλιο αντίστοιχα.

Η ταχύτητα και η περίοδος στην κυκλική ομαλή κίνηση συνδέονται με τη σχέση

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$



Αντικαθιστώντας την ταχύτητα στις παραπάνω σχέσεις και διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{L_{\Gamma}}{L_A} = \frac{M_{\Gamma} \frac{2\pi r_{\Gamma}}{T_{\Gamma}} r_{\Gamma}}{M_A \frac{2\pi r_A}{T_A} r_A} = \frac{M_{\Gamma} r_{\Gamma}^2 T_A}{M_A r_A^2 T_{\Gamma}}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, $\frac{M_{\Gamma}}{M_A} = 10$, $\frac{r_A}{r_{\Gamma}} = 1,5$, $\frac{T_A}{T_{\Gamma}} = 2,2$.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\frac{L_{\Gamma}}{L_A} = 10 \cdot \frac{1}{1,5^2} 2,2 \Rightarrow \frac{L_{\Gamma}}{L_A} = \frac{88}{9}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΚΡΟΥΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0 . Όταν το βλήμα φτάνει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται σε τρία κομμάτια. Αμέσως μετά την έκρηξη, η ολική ορμή και των τριών κομματιών είναι

α) μηδέν.

β) mv_0 .

γ) διάφορη του μηδενός και διάφορη του mv_0 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η έκρηξη διαρκεί πολύ μικρό χρόνο, τυχόν επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, όπως εδώ το βάρος, θεωρείται αμελητέα. Συνεπώς στη διάρκεια της έκρηξης η ορμή διατηρείται. Επειδή η κρούση έγινε στο ψηλότερο σημείο, η ταχύτητα του σώματος πριν την έκρηξη είναι μηδέν, άρα και η ορμή του.

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει: $p_{\text{Τελ}} = p_{\text{Αρχ}} = 0$.

Ερώτηση 2.

Μια σφαίρα Α μάζας m κινούμενη οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α, λόγω της κρούσης,

- α) έχει ίδια κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο mu .
- β) έχει αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο mu .
- γ) έχει αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο $2mu$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική ελαστική τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς η τελική ορμή της σφαίρας Α θα είναι μηδέν. Η μεταβολή της ορμής της θα είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{Τελ}} - \vec{p}_{\text{Αρχ}} = 0 - \vec{p}_{\text{Αρχ}} = -m \cdot \vec{u}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α θα έχει ίδια διεύθυνση με την αρχική ορμή και αντίθετη φορά (-). Το μέτρο της θα είναι $\Delta p = m \cdot u$.

Ερώτηση 3.

Δύο σώματα με ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά.

Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίσο με:

α) p .

β) $2p$.

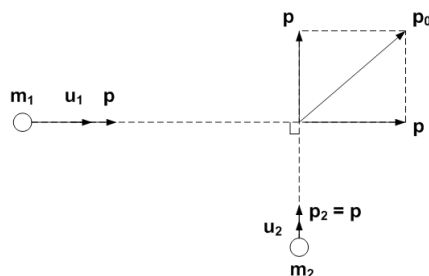
γ) $\sqrt{2}p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{\text{Αρχ}} = \vec{p}_{\text{Τελ}}$. Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0 , του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_0 = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα $p_{\text{Τελ}} = \sqrt{2}p$.

Ερώτηση 4.

Δύο σώματα με ίσες μάζες ($m_1 = m_2 = m$) και ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά. Αν η κινητική ενέργεια και η ορμή ενός σώματος συνδέονται με τη σχέση $K = \frac{p^2}{2m}$, τότε η μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με

α) $\frac{p^2}{m}$.

β) $\frac{p^2}{2m}$.

γ) $\frac{p^2}{4m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

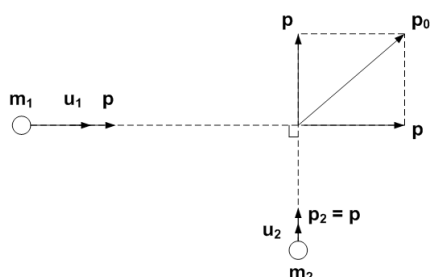
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

$$|\Delta K| = K_1 + K_2 - K_{\text{Συστ}} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_{\text{τελ}}^2}{2(m+m)} \quad (1)$$

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{\text{Αρχ}} = \vec{p}_{\text{Τελ}}$.

Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0 , του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_0 = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα $p_{\text{Τελ}} = \sqrt{2}p$.

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$|\Delta K| = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} - \frac{(\sqrt{2}p)^2}{2(m+m)} \Rightarrow |\Delta K| = \frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 5.

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω και συγκρούεται ελαστικά με οριζόντιο δάπεδο. Αν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και $υ$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση, τότε η μεταβολή της ταχύτητάς του, λόγω της κρούσης

α) είναι μηδέν.

β) έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με $υ$.

γ) έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με $2υ$.

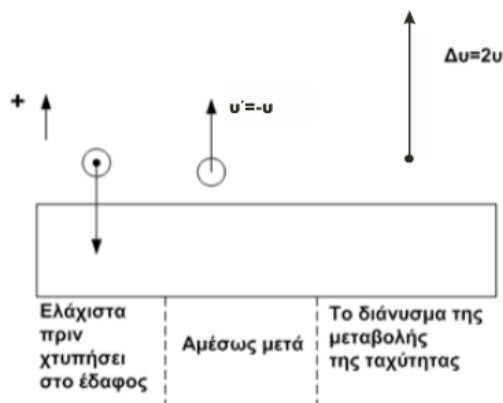
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική το σώμα θα αναπηδήσει με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Συνεπώς, $\Delta \vec{v} = \vec{v}_\tau - \vec{v}_\alpha$. Αν ορίσουμε θετική φορά προς τα πάνω προκύπτει ότι και το διάνυσμα $\Delta \vec{v}$ θα έχει θετική φορά, το μέτρο του θα είναι:

$$|\Delta \vec{v}| = |\vec{v}_\tau - \vec{v}_\alpha| = v - (-v) = 2v$$



Ερώτηση 6.

Μια σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1 = m$, συγκρούεται κεντρικά πλαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 , μάζας $m_2 = m$. Στη σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση μένει το

- α) 50% της αρχικής ενέργειάς της.
- β) 100% της αρχικής ενέργειάς της.
- γ) 25% της αρχικής ενέργειάς της.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Με εφαρμογή της διατήρησης της ορμής βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V, \text{ από όπου προκύπτει } V = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{v_1}{2}.$$

Οπότε η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση θα είναι:

$$K'_1 = \frac{m_1 V^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{K_1}{4}$$

Όπου K_1 η κινητική της ενέργεια πριν την κρούση,

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 4K'_1$$

Συνεπώς το % ποσοστό της ενέργειας που αντιστοιχεί (μένει) στη μάζα m_1 θα είναι:

$$\alpha \% = \frac{K'_1}{K_1} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$$

Ερώτηση 7.

Ένα σώμα Α με ορμή μέτρου p και μάζα m συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα Β, ίδιας μάζας με το Α. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι ίση με

α) μηδέν.

β) $-\frac{p^2}{2m}$.

γ) $\frac{p^2}{2m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α θα είναι ίση με

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = 0 - \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \Delta K = -\frac{m^2 v^2}{2m} \Rightarrow \Delta K = -\frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 8.

Μια σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1 = m$, συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 , μάζας $m_2 = m$. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 λόγω της κρούσης

α) μετατρέπεται σε θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον.

β) μοιράζεται μεταξύ των δύο σφαιρών.

γ) μεταφέρεται εξολοκλήρου στη σφαίρα Β

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική διατηρείται η μηχανική ενέργεια και δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας στο περιβάλλον. Επειδή τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, λόγω της κρούσης, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητα. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια, λόγω της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, όλη η κινητική ενέργεια του σώματος Α θα μεταφερθεί στο σώμα Β.

Ερώτηση 9.

Ένα σώμα Α μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{v}_1$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα Β μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων, $\frac{v_1}{v_2}$, των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 2.

γ) 4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει ότι για να είναι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση μηδέν πρέπει το δεύτερο σώμα να κινείται και μάλιστα με ορμή αντίθετη από αυτήν του σώματος Α.

Εφαρμόζουμε την Διατήρησης της Ορμής για την κρούση.

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow 2mv_1 - mv_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 10.

Ένα σώμα Α μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει κινητική ενέργεια $K_A = K$, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Β μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι ίση με

α) $4K$.

β) $\frac{K}{3}$.

γ) $3K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αφού το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο όλη η κινητική ενέργεια που είχαν τα σώματα πριν την κρούση μετατρέπεται σε θερμότητα.

$$Q = K_A + K_B \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow 2mv_1 - mv_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 2v_1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$Q = K_A + K_B = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}2mv_1^2 + \frac{1}{2}m(2v_1)^2 = mv_1^2 + 2mv_1^2 \Rightarrow$$

$$Q = K + 2K \Rightarrow Q = 3K$$

Ερώτηση 11.

Ένα σώμα Α μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα v_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Β μάζας m_2 . Το σώμα Α συνεχίζει μετά την κρούση να κινείται κατά την ίδια φορά με ταχύτητα $v'_1 = \frac{v_1}{2}$. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων, $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με

α) 3.

β) 2.

γ) $\frac{1}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{v_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

$$\text{Άρα, } \frac{m_1}{m_2} = 3.$$

Ερώτηση 12.

Δύο σφαίρες Α και Β, με ίσες μάζες, κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ίδιες κατευθύνσεις και ταχύτητες που έχουν μέτρα $v_1 = 10 \frac{m}{s}$ και $v_2 = 20 \frac{m}{s}$, αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται χωρίς να δημιουργείται συσσωμάτωμα. Αν μετά την κρούση το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Α είναι $v'_1 = 15 \frac{m}{s}$, τότε η κρούση είναι

α) ελαστική.

β) πλάγια.

γ) ανελαστική.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή οι σφαίρες κινούνται με ίδιες κατευθύνσεις η κρούση δεν είναι πλάγια.

Ισχύει η διατήρηση της ορμής.

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Επειδή $m_1 = m_2 = m$ η σχέση γίνεται $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$, από όπου με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$v'_2 = 15 \frac{m}{s}$$

Ελέγχουμε αν διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος, δηλαδή αν ισχύει

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \text{ή} \quad v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

$$\text{Όμως } v_1^2 + v_2^2 = 20^2 + 10^2 = 500 \quad \text{και} \quad v_1'^2 + v_2'^2 = 15^2 + 15^2 = 450$$

Άρα, αφού η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται η κρούση είναι **ανελαστική***.

*Διόρθωση

Ερώτηση 13.

Σφαίρα Α που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου v και κινητική ενέργεια K , συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Β, ίσης μάζας με την Α, που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με

α) $0,25K$.

β) $0,5K$.

γ) $0,75K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα:

$$(m_1 + m_2)V = m_1v + 0 \Rightarrow 2mV = mv \Rightarrow V = \frac{v}{2}$$

$$K_{\text{συσωμ}} = \frac{(m + m)V^2}{2} = mV^2 \Rightarrow K_{\text{συσωμ}} = m \frac{v^2}{4} = \frac{K}{2} \Rightarrow K_{\text{συσωμ}} = 0,5K$$

Ερώτηση 14.

Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη Α, Β και Γ. Τα μέρη Α και Β έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με:

$$p_1 = p_2 = p = 20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

α) $10 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$

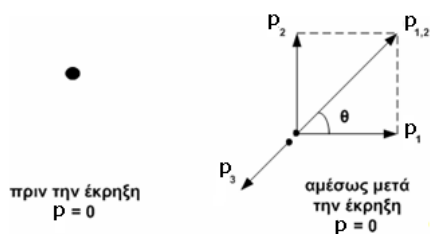
β) $20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$

γ) $20\sqrt{2} \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.



Επειδή η ορμή διατηρείται θα ισχύει

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_{12} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι οι κατευθύνσεις των $\vec{p}_3$ και $\vec{p}_{12}$ θα είναι αντίθετες.

Το μέτρο της ορμής $\vec{p}_{12}$ είναι:

$$p_{12} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{2p^2} = p\sqrt{2} \Rightarrow p_{12} = 20\sqrt{2} \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$$

Άρα το μέτρο της ορμής του 3^{ου} κομματιού είναι $p_3 = 20\sqrt{2} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ερώτηση 15.

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K . Η κίνηση του σώματος γίνεται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Το σώμα αφού συμπιέσει το ελατήριο το εγκαταλείπει στο ίδιο σημείο που το συνάντησε.

Η μεταβολή της ορμής p του σώματος από τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και μέχρι να επανέλθει στο ίδιο σημείο έχει μέτρο

α) 0 .

β) p .

γ) $2p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

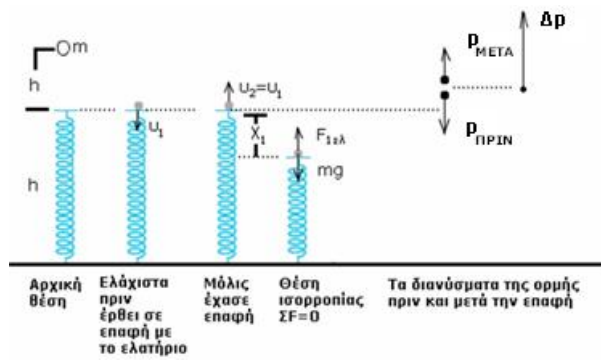
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του είναι συντηρητικές (βάρος και δύναμη ελατηρίου), άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητάς του ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την επαφή του με το ελατήριο θα είναι ίδια αφού στην ίδια θέση θα έχει ίδια κινητική και δυναμική ενέργεια.

Συνεπώς η μεταβολή της ορμής του θα είναι:

$$\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}_{\text{μετά}} - \vec{p}_{\text{πριν}}$$

Τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση, ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω, μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση σε αλγεβρική και λαμβάνουμε υπόψη ότι $|\vec{p}_{\text{μετά}}| = |\vec{p}_{\text{πριν}}| = p$

Προκύπτει $\Delta p = p - (-p) = 2p$. Η κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta p}$ θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.



Ερώτηση 16.

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K . Η κίνηση του σώματος γίνεται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Το σώμα αφού συμπιέσει το ελατήριο το εγκαταλείπει στο ίδιο σημείο που το συνάντησε.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι μέγιστο.

α) τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

β) στη θέση όπου η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται είναι μηδέν.

γ) στη θέση μέγιστης συσπίρωσης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Από τη στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο εκτός από το βάρος του ασκείται και η δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τα πάνω. Παίρνοντας τα θετικά προς τα κάτω ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής γράφεται:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow mg - F_{\text{ελ.ατ}} = m\alpha \Rightarrow mg - kx = m\alpha, \text{ όπου } x \text{ η παραμόρφωση του ελατηρίου.}$$

Καθώς το σώμα κατεβαίνει το x μεγαλώνει. Επομένως η επιτάχυνση α μικραίνει. Συνεχίζει όμως να αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος, αλλά με μικρότερο ρυθμό.

Κάποια στιγμή θα γίνει $\Sigma F = 0$, στη θέση αυτή η ταχύτητα θα είναι μέγιστη και η επιτάχυνση ίση με το μηδέν. Στη συνέχεια, επειδή το x αυξάνεται, η kx θα γίνει μεγαλύτερη από το βάρος, η επιτάχυνση θα γίνει αρνητική και το σώμα θα αρχίσει να επιβραδύνεται.

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι μέγιστο στη θέση που ισχύει $\Sigma F = 0$.

Ερώτηση 17.

Μια μπάλα αφήνεται να πέσει κατακόρυφα στο έδαφος με ορμή $10 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$ και αναπηδά με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Ο χρόνος πρόσκρουσης είναι $0,5\text{s}$.

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της μπάλας στη διάρκεια της κρούσης σε $\frac{\text{Kgm}}{\text{s}^2}$ έχει μέτρο ίσο με

α) 40 .

β) 20 .

γ) 10 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

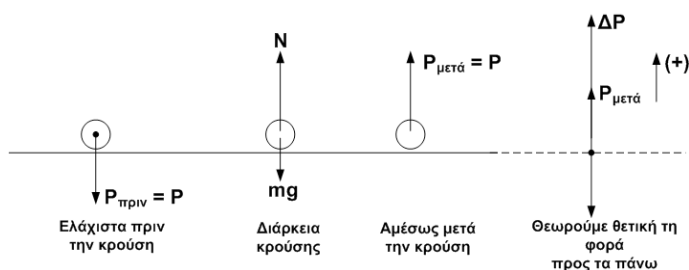
Σωστή απάντηση είναι η α.

Η μπάλα στη διάρκεια της κρούσης δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα και γι αυτό μεταβάλλεται η ορμή της.

Η μεταβολή της ορμής θα είναι: $\vec{\Delta p} = \vec{p}_{(\text{μετά})} - \vec{p}_{(\text{πριν})}$ (1)

Επειδή τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση ορίζουμε φορά (θετική προς τα πάνω) και μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση σε αλγεβρική:

$$\Delta p = p - (-p) = 2p = 2 \cdot 10 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p = 20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$$

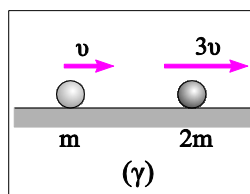
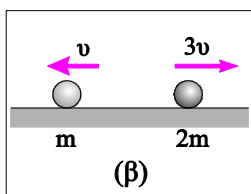
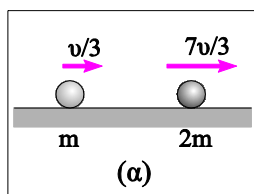
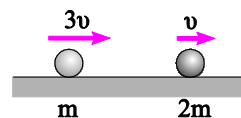


$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}}{0,5\text{s}} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 40 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}^2}$$

Ερώτηση 18.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Ποντικό Ηλία)

Η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών του σχήματος είναι κεντρική και ελαστική. Οι σφαίρες μετά την κρούση θα κινηθούν όπως στο σχήμα



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστό είναι το σχήμα (α).

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής.

Οι σφαίρες του σχήματος της εκφώνησης έχουν πριν την κρούση συνολική ορμή

$$p_{\alpha\rho\chi} = m \cdot 3v + 2m \cdot v \Rightarrow p_{\alpha\rho\chi} = 5mv$$

Άρα και η τελική ορμή του συστήματος των σφαιρών πρέπει να είναι $p_{\tau\epsilon\lambda} = 5 \cdot mv$

Στο σχήμα (α) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{\tau\epsilon\lambda} = 2m \cdot \frac{7v}{3} + m \cdot \frac{v}{3} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda} = 5mv$$

Στο σχήμα (β) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{\tau\epsilon\lambda} = 2m \cdot 3v - mv \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda} = 5mv$$

Στο σχήμα (γ) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{\tau\epsilon\lambda} = 2m \cdot 3v + mv \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda} = 7mv$$

Άρα, η διατήρηση της ορμής ικανοποιείται μόνο στα σχήματα (α) και (β).

Η κρούση είναι ελαστική. Επομένως θα πρέπει επίσης να διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

Πριν την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m \cdot (3v)^2 + \frac{1}{2}2m \cdot v^2 \Rightarrow K_{αρχ} = \frac{11}{2}mv^2$$

Στο σχήμα (α) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}2m \cdot \left(\frac{7v}{3}\right)^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{11}{2}mv^2$$

Στο σχήμα (β) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}2m \cdot (3v)^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{19}{2}mv^2$$

Παρατηρούμε ότι η διατήρηση της ορμής και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας ικανοποιούνται μόνο στο σχήμα (α).

Ερώτηση 19.

Ένα σώμα Α μάζας Μ είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα άλλο σώμα Β μάζας m, που κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται πλαστικά κεντρικά με το σώμα Α. Αν μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει το $\frac{1}{3}$ της κινητικής ενέργειας που είχε ελάχιστα πριν την κρούση, τότε μεταξύ των μαζών των σωμάτων ισχύει η σχέση

α) $\frac{M}{m} = 6.$

β) $\frac{M}{m} = 2.$

γ) $\frac{M}{m} = 3.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

$$\text{Δίνεται ότι: } \frac{K_{\text{ολ}}^{\text{τελ}}}{K_{\text{ολ}}^{\text{αρχ}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(M+m)V^2}{\frac{mv^2}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V^2}{v^2} = \frac{m}{3(M+m)} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη Διατήρησης της Ορμής για την κρούση, οπότε παίρνουμε:

$$p_{\text{ολ}}^{\text{τελ}} = p_{\text{ολ}}^{\text{αρχ}} \Rightarrow (M+m)V = mv \Rightarrow \frac{V}{v} = \frac{m}{M+m} \quad (2)$$

Αφού υψώσουμε την (2) στο τετράγωνο την εξισώνουμε με τη (1), οπότε προκύπτει:

$$\frac{m}{3(M+m)} = \frac{m^2}{(M+m)^2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{m}{(M+m)} \Rightarrow 2m = M \text{ άρα } \frac{M}{m} = 2.$$

Ερώτηση 20.

Μια μικρή σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 , συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους v'_1 και v'_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $|v'_1| = 2|v'_2|$. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με:

α) 1.

β) $\frac{1}{5}$.

γ) 5.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Έχουμε ελαστική κρούση δύο σωμάτων από τα οποία το ένα αρχικά είναι ακίνητο, οπότε οι ταχύτητές τους μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

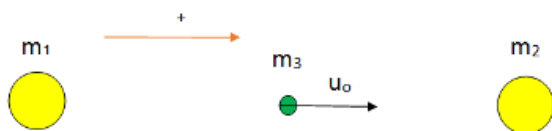
$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετες φορές. Όπως προκύπτει από τις πιο πάνω σχέσεις το σώμα Σ_2 θα έχει ίδια φορά με αυτή που είχε πριν την κρούση το Σ_1 . Συνεπώς για τα μέτρα των ταχυτήτων θα ισχύει:

$$-v'_1 = 2v'_2 \Rightarrow -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

$$\text{Από όπου προκύπτει: } -m_1 + m_2 = 4m_1 \Rightarrow m_2 = 5m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$$

Ερώτηση 21.



Όλες οι σφαίρες του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ελαστικές και αρχικά είναι ακίνητες. Οι μάζες των σφαιρών συνδέονται με τη σχέση: $m_1 = m_2 = 4m_3$. Στη σφαίρα μάζας m_3 δίνουμε αρχική ταχύτητα u_0 και οι κρούσεις που ακολουθούν είναι κεντρικές. Ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά είναι

α. 2.

β. 3.

γ. 4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η 1^η κρούση είναι μεταξύ των σφαιρών με μάζες m_3, m_2 . Αυτές θα κινηθούν με ταχύτητες:

$$u_3' = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} u_0 = \frac{m_3 - 4m_3}{m_3 + 4m_3} u_0 = -\frac{3u_0}{5} \Rightarrow u_3' = -0,6u_0$$

$$\text{και: } u_2' = \frac{2m_3}{m_3 + m_2} u_0 = \frac{2u_0}{5} \Rightarrow u_2' = 0,4u_0$$

Η σφαίρα μάζας m_3 γυρίζει πίσω με ταχύτητα μέτρου $0,6u_0$ και συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με την ακίνητη m_1 . Μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα

$$u_3'' = \frac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1} u_3' = \frac{m_3 - 4m_3}{m_3 + 4m_3} (-0,6u_0) = \frac{1,8u_0}{5} \Rightarrow u_3'' = 0,36u_0$$

Επειδή μετά την 2^η κρούση η ταχύτητα της σφαίρας με μάζα m_3 είναι μικρότερη της ταχύτητας της σφαίρας με μάζα m_2 δεν θα υπάρξει άλλη κρούση.

Άρα θα γίνουν 2 κρούσεις.

Ερώτηση 22.



Τα σώματα Α και Β του σχήματος με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα είναι ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Εκτοξεύουμε το σώμα Α με ταχύτητα u_0 προς το Β, η κρούση που ακολουθεί είναι κεντρική πλαστική και διαρκεί χρονικό διάστημα Δt . Το μέτρο της μέσης δύναμης που άσκησε το σώμα Α στο σώμα Β δίνεται από τη σχέση

α. $F = \frac{m_B m_A u_0}{(m_A - m_B) \Delta t}$.

β. $F = \frac{m_B m_A u_0}{(m_A + m_B) \Delta t}$.

γ. $F = \frac{(m_B + m_A) u_0}{m_A m_B \Delta t}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad m_A u_0 = (m_A + m_B) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m_A u_0}{m_A + m_B}. \quad (1)$$

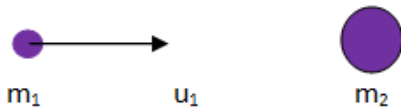
Το μέτρο της μέσης δύναμης F που αναπτύσσει το Α στο Β είναι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_B V - 0}{\Delta t}$$

Με αντικατάσταση της V από την (1) παίρνουμε:

$$F = \frac{m_B m_A u_0}{(m_A + m_B) \Delta t}$$

Ερώτηση 23.



Ένα σώμα μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα u_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Το ποσοστό % της ορμής, που μεταφέρεται από το σώμα μάζας m_1 στο σώμα μάζας m_2 κατά την κρούση είναι μεγαλύτερο όταν για τις μάζες ισχύει η σχέση

α. $\frac{m_1}{m_2} = 1$

β. $\frac{m_1}{m_2} \gg 1$

γ. $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της ΑΔΟ.

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}.$$

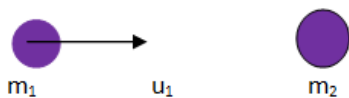
Το σώμα μάζας m_2 αποκτά ορμή $p_2 = m_2 V = \frac{m_2 m_1 u_1}{m_1 + m_2}.$

Επειδή $p_{2, \text{αρχ.}} = 0$, το ποσοστό % της ορμής που μεταφέρθηκε από το πρώτο στο δεύτερο σώμα είναι:

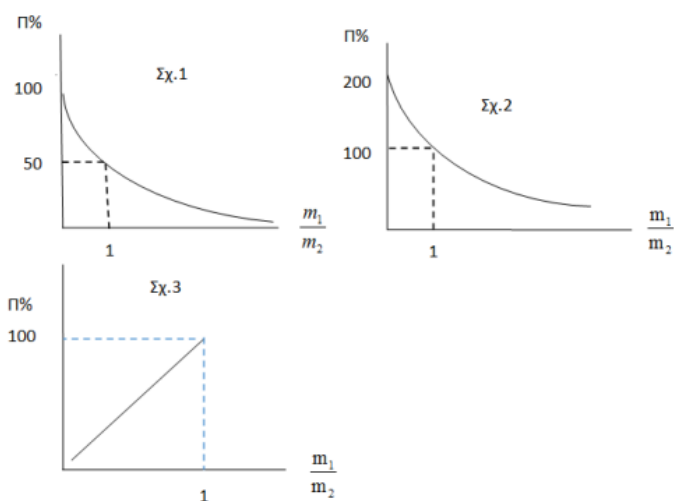
$$\pi\% = \frac{\Delta p_2}{p_1} 100\% = \frac{\frac{m_1 m_2 u_1}{m_1 + m_2}}{m_1 u_1} 100\% = \frac{m_2}{m_1 + m_2} 100\% = \frac{100}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \%.$$

Παρατηρούμε ότι όσο μικραίνει ο λόγος των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ μεγαλώνει το ποσοστό της ορμής που μεταβιβάζει το κινούμενο σώμα m_1 στο ακίνητο m_2 .

Ερώτηση 24.



Ένα σώμα, Σ_1 , μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα u_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα, Σ_2 , μάζας m_2 . Η γραφική παράσταση του ποσοστού % της ορμής του σώματος Σ_1 που μεταφέρεται στο Σ_2 κατά την κρούση, σε συνάρτηση με το λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ απεικονίζεται στο διάγραμμα



α) 1

β) 2

γ) 3

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το Σ_2 μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα $u_2' = \frac{2m_1u_1}{m_1+m_2}$

και θα αποκτήσει ορμή $p_2 = m_2u_2' = \frac{2m_1m_2u_1}{m_1+m_2}$

Το ποσοστό % της ορμής του σώματος Σ_1 που μεταφέρεται στο Σ_2 είναι:

$$\pi\% = \frac{\Delta p_2}{p_1} 100\% = \frac{p_2' - 0}{p_1} 100\% = \frac{m_2 u_2'}{m_1 u_1} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{m_2}{m_1 u_1} \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2} 100\% = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} 100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = \frac{200}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \%$$

Η συνάρτηση είναι μια υπερβολή, άρα σωστά διαγράμματα μπορεί να είναι τα 1, 2.

Όταν ο λόγος $\frac{m_1}{m_2} = 1$, τότε $\pi\% = 100\%$. Αυτό συμβαίνει μόνο στο διάγραμμα 2.

Ερώτηση 25.

Σε πείραμα στο C.E.R.N., δύο πρωτόνια επιταχύνονται σε μεγάλες ταχύτητες, κινούμενα αντίθετα σε παράλληλες διευθύνσεις με ταχύτητες ίσων μέτρων, και αλληλεπιδρούν με δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικές.

Στη φάση της αλληλεπίδρασης δεν επιδρούν στο σύστημα των δύο πρωτονίων εξωτερικά αίτια π.χ. πεδία. Μετά την αλληλεπίδρασή τους τα πρωτόνια κινούνται



- α. σε παράλληλες διευθύνσεις, διαφορετικές των αρχικών.
- β. στις ίδιες διευθύνσεις με πριν.
- γ. οπωσδήποτε σε κάθετες διευθύνσεις.

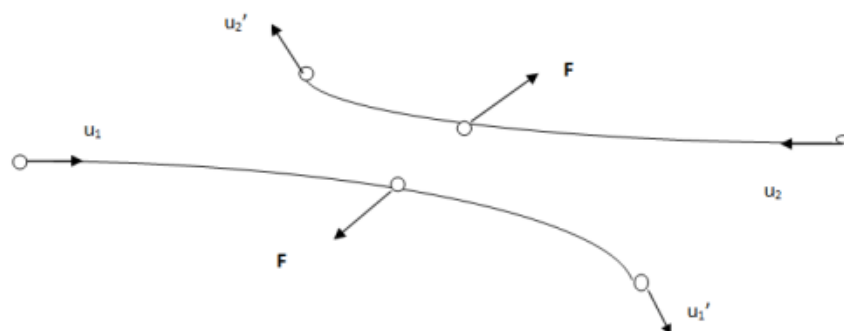
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

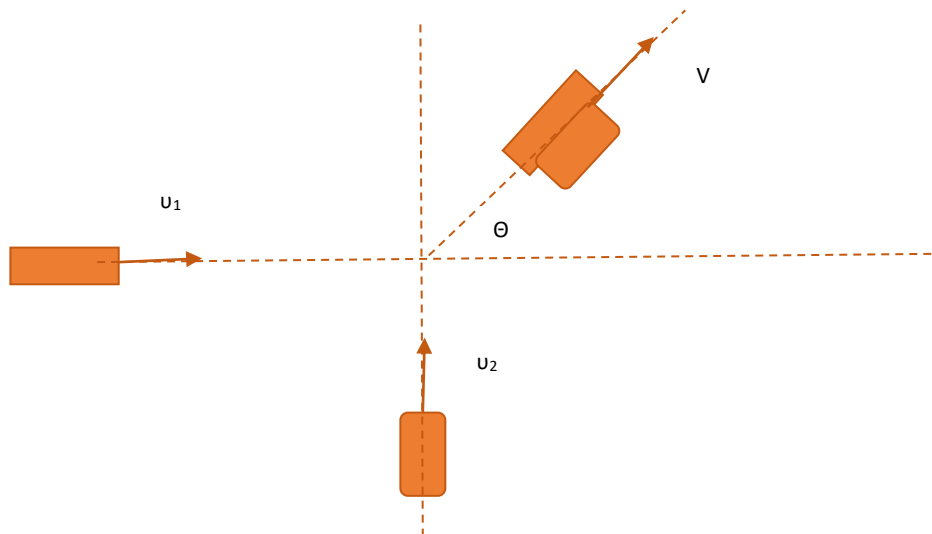
Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η αρχική ορμή του συστήματος είναι μηδέν και θα παραμείνει μηδέν, αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις. Άρα, σωστές απαντήσεις μπορεί να είναι μόνο οι α, β.

Επειδή οι διευθύνσεις των αρχικών ταχυτήτων είναι παράλληλες, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης δεν βρίσκονται πάνω στις διευθύνσεις των ταχυτήτων, με συνέπεια να ακολουθήσουν διαφορετικές πορείες από τις αρχικές. Όμως κάθε στιγμή πρέπει να έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων και αντίθετων κατευθύνσεων.



Ερώτηση 26.



Σε μια πλαγιομετωπική σύγκρουση δύο αυτοκινήτων 1, 2, που κινούνται σε κάθετους δρόμους, δημιουργείται συσσωμάτωμα, το οποίο αποκτά κοινή ταχύτητα V που σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με τη διεύθυνση κίνησης του αυτοκινήτου 1. Ο εμπειρογνώμονας ζυγίζει τα αυτοκίνητα και βρίσκει ότι το αυτοκίνητο 2 είναι 20% βαρύτερο από το 1.

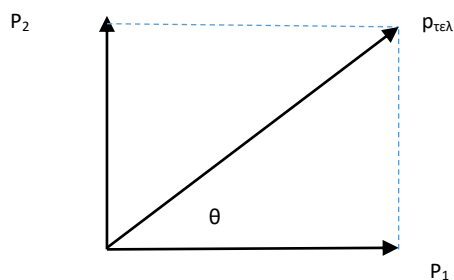
Ο λόγος των ταχυτήτων u_1/u_2 είναι

- α) ίσος με ένα.
- β) μεγαλύτερος του ένα.
- γ) μικρότερος του ένα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).



$$\text{Είναι } \varepsilon_{\phi\theta} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{ή} \quad 1 = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{ή} \quad p_1 = p_2 \quad \text{ή} \quad m_1 u_1 = m_2 u_2 \quad \text{ή} \quad m_1 u_1 = 1,2 m_1 u_2 \quad \text{ή} \quad \frac{u_1}{u_2} = 1,2$$

Ερώτηση 27.

Οι σφαίρες Σ_1 , Σ_2 του σχήματος είναι ελαστικές. Η σφαίρα Σ_1 κινούμενη με ταχύτητα u_1 συγκρούεται κεντρικά με την ακίνητη Σ_2 που βρίσκεται μπροστά από λείο κατακόρυφο τοίχο με τον οποίο στην συνέχεια συγκρούεται ελαστικά. Η σφαίρα Σ_1 επιστρέφει με ταχύτητα $u_1/2$. Η ταχύτητα της Σ_2 μετά την κρούση με τον τοίχο είναι:



α) u_1 .

β) $u_1/2$.

γ) 0.

Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική ελαστική, άρα για την ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 έχουμε:

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow -\frac{u_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow 2m_1 - 2m_2 = -m_1 - m_2 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

Η σφαίρα Σ_2 μετά την κρούση της με την Σ_1 αποκτά ταχύτητα u_2' για την οποία ισχύει:

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{u_1}{2}$$

Μετά την ελαστική κρούση της με τον τοίχο θα επιστρέψει με ταχύτητα ίδιου μέτρου, δηλαδή $\frac{u_1}{2}$.

Ερώτηση 28.

Μια σφαίρα Α μάζας m κινούμενη με ταχύτητα μέτρου u συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητη δεύτερη σφαίρα Β διπλάσιας μάζας. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α είναι

α) $mu/3$

β) $-2mu/3$

γ) $-mu/3$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

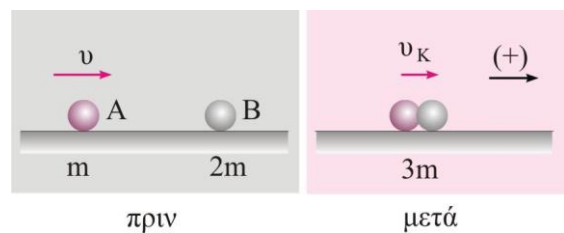
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σφαιρών λίγο πριν και αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m u = 3m v_{\kappa} \Rightarrow v_{\kappa} = \frac{u}{3}$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α είναι

$$\Delta p_A = p'_A - p_A = m v_{\kappa} - m u \Rightarrow \Delta p_A = -\frac{2mu}{3}$$



Ερώτηση 29.

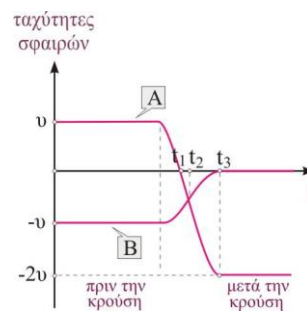
Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων δυο σφαιρών Α και Β πριν και μετά τη μεταξύ τους κεντρική κρούση. Οι μάζες των δύο σφαιρών συνδέονται με τη σχέση

α. $m_B = 3m_A$

β. $m_B = 2m_A$

γ. $m_B = m_A$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



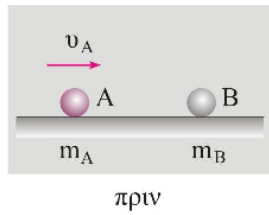
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_A v - m_B v = -m_A \cdot 2v + 0 \Rightarrow m_B = 3m_A$$

Ερώτηση 30.



Η σφαίρα A του σχήματος, μάζας m_A , προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου u στην ακίνητη σφαίρα B, μάζας $m_B = m_A/3$, σχηματίζοντας συσσωμάτωμα. Κατά την κρούση το 25% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα. Αν η σφαίρα A προσπέσει στη σφαίρα B με ταχύτητα μέτρου $2u$, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που θα γίνει θερμότητα είναι

α. 25%

β. 50%

γ. 75%.

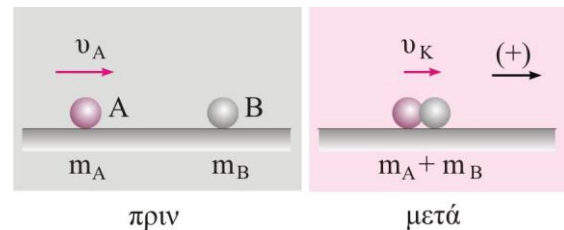
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ και έχουμε:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_A v_A = (m_A + m_B) v_K, \quad (1)$$



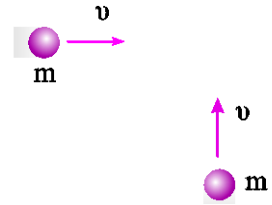
$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{\text{αρχ}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_K^2}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} 100\% = \frac{m_A v_A^2 - (m_A + m_B) \left(\frac{m_A v_A}{m_A + m_B} \right)^2}{m_A v_A^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{m_B}{m_A + m_B} 100\%$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της αρχικής ταχύτητας u_A .

Ερώτηση 31.

Οι δύο σφαίρες του σχήματος κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις με ταχύτητες ίδιου μέτρου και συγκρούονται πλαστικά. Η κίνηση γίνεται σε οριζόντιο λείο επίπεδο. Το μέτρο της ταχύτητας V_K του δημιουργούμενου συσσωματώματος είναι



α. $V_K = v\sqrt{2}$

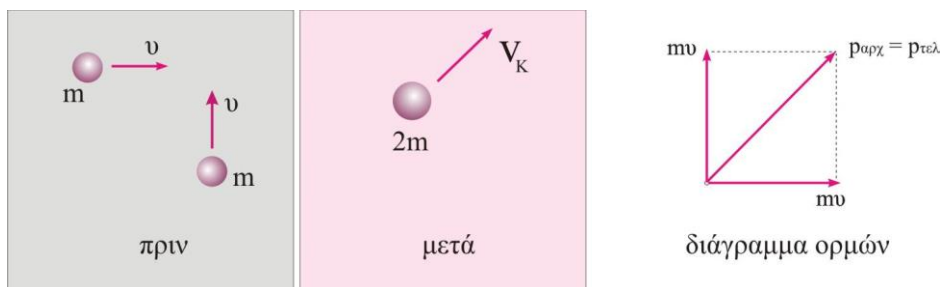
β. $V_K = \frac{v\sqrt{2}}{2}$

γ. $V_K = 2v$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

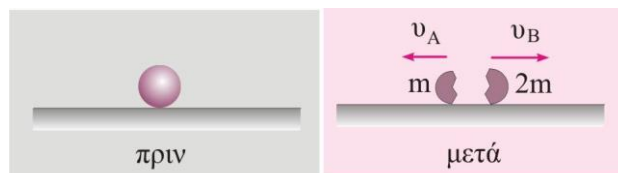


Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{τελ}} = \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow (2m \cdot V_K)^2 = (mv)^2 + (mv)^2 \Rightarrow 4V_K^2 = 2v^2 \Rightarrow V_K = v \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ερώτηση 32.

Ένα αρχικά ακίνητο σώμα που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο εκρήγνυται σε δύο κομμάτια Α και Β με μάζες $m_A=m$ και $m_B=2m$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.



Αν με K συμβολίσουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο κομματιών μετά την έκρηξη, τότε για την κινητική ενέργεια του κομματιού Α, K_A , ισχύει

α. $K_A = \frac{K}{3}$

β. $K_A = \frac{2K}{3}$

γ. $K_A = \frac{K}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Α. Η έκρηξη οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις, άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow 0 = 2mv_B - mv_A \Rightarrow v_A = 2v_B$$

Β. Η κινητική ενέργεια του δημιουργούμενου συσσωματώματος είναι: $K = K_A + K_B$

$$\text{Όμως, } K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v_A^2}{m} = \frac{p_A^2}{2m} \text{ και } K_B = \frac{p_B^2}{4m} = \frac{K_A}{2}$$

$$\text{Άρα, } K = K_A + \frac{K_A}{2} \Rightarrow K_A = \frac{2K}{3}$$



Ερώτηση 33.

Τα σφαιρίδια A και B του σχήματος είναι δεμένα σε μη ελαστικά νήματα ίδιου μήκους των οποίων οι άλλες άκρες είναι δεμένες ακλόνητα στο ίδιο σημείο O. Εκτρέπουμε τα σφαιρίδια ώστε τα νήματα να είναι αρχικά οριζόντια και τεντωμένα.

Αφήνουμε πρώτα το σφαιρίδιο A και ύστερα το B ώστε τα σφαιρίδια να

συγκρουστούν στη θέση (Γ). Αν η σύγκρουση είναι κεντρική και ελαστική και αμέσως

μετά την κρούση το σφαιρίδιο B στιγμιαία ακινητοποιείται, ο λόγος των μαζών $\frac{m_A}{m_B}$ των

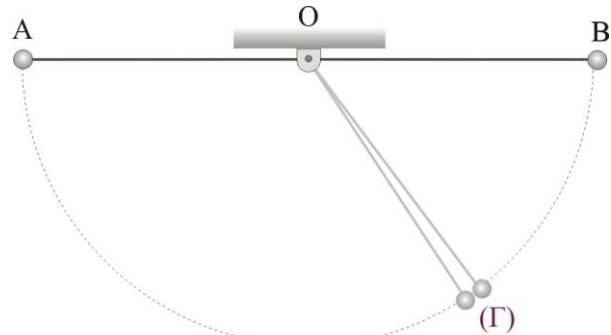
σφαιριδίων είναι

α. 1/4.

β. 1/2.

γ. 1/3.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

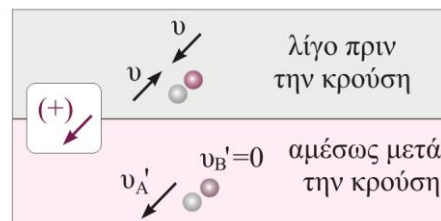
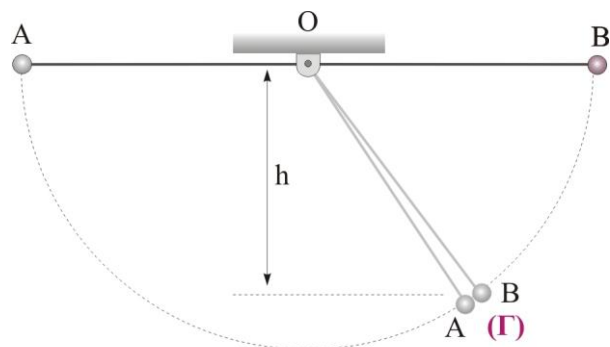
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Τα σφαιρίδια από τη θέση ελευθέρωσης μέχρι της θέση σύγκρουσης έχουν την ίδια κατακόρυφη μετατόπιση, h. Με εφαρμογή του θεωρήματος έργου ενέργειας για κάθε σφαιρίδιο μεταξύ των δύο θέσεων προκύπτει ότι οι ταχύτητές τους θα έχουν ίδιο μέτρο.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_w \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \quad \text{ή}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Το σφαιρίδιο B αμέσως μετά την κεντρική και ελαστική σύγκρουση ακινητοποιείται ($v_B' = 0$). Εφαρμόζουμε τη σχέση της κεντρικής και ελαστικής κρούσης για το σφαιρίδιο B και παίρνουμε:



$$v'_B = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B + \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} (-v) + \frac{2m_A}{m_A + m_B} (v) = 0 \quad \text{ή}$$

$$2m_A = m_B - m_A \quad \text{ή} \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{3}$$

Ερώτηση 34.

Μία σφαίρα Σ_A , μάζας m_A , κινούμενη με ταχύτητα μέτρου u_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την αρχικά ακίνητη σφαίρα Σ_B , μάζας m_B . Αν ο λόγος των μαζών των

σφαιρών είναι $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}$, το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της σφαίρας A

κατά την κρούση είναι

- α. 50%.
- β. $\frac{800}{9}\%$.
- γ. 64%.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

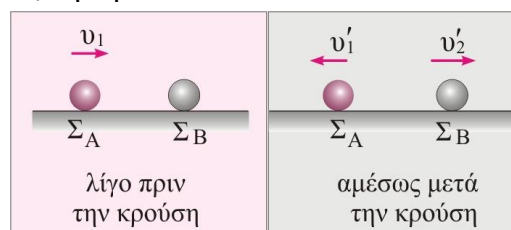
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κρούση είναι ελαστική, επομένως η κινητική ενέργεια που έχασε η σφαίρα Σ_A κατά την κρούση ισούται με την κινητική ενέργεια που πήρε η σφαίρα Σ_B .

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική, οπότε η σφαίρα Σ_B μετά την κρούση κινείται με

ταχύτητα
$$v'_2 = \frac{2m_A}{m_A + m_B} u_1$$



Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_A κατά την κρούση ισούται με :

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_B v'^2_2}{\frac{1}{2} m_A v^2_1} 100\%$$

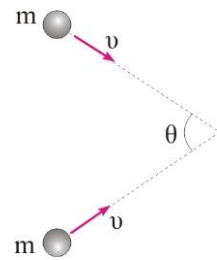
Αντικαθιστώντας το u_2' στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_B \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} u_1 \right)^2}{\frac{1}{2} m_A u^2_1} 100\% = \frac{m_B \cdot 4m^2_A}{m_A (m_A + m_B)^2} 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = \frac{4 \cdot 2m_A m_A}{(m_A + 2m_A)^2} 100\% = \frac{8m^2_A}{9m^2_A} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi\% = \frac{800}{9}\%$$

Ερώτηση 35.

Δύο ίδιες σφαίρες μάζας m κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρου u και συγκρούονται πλαστικά. Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση σχηματίζουν γωνία και κατά την κρούση το σύστημα χάνει το 25% της αρχικής κινητικής του ενέργειας. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου



α. $u \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β. $u \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ. $u \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει μάζα $2m$ και ταχύτητα V . Το σύστημα λόγω της κρούσης χάνει το 25% και μένει με το 75% της αρχικής κινητικής του ενέργειας.

$$K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} 2mV^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} mu^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$2mV^2 = \frac{3}{4} 2mu^2 \quad \text{ή} \quad V = u \frac{\sqrt{3}}{2}$$

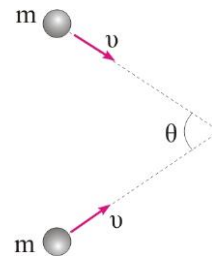
Ερώτηση 36.

Δύο ίδιες σφαίρες μάζας m κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρου u και συγκρούονται πλαστικά. Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση σχηματίζουν γωνία θ και κατά την κρούση το σύστημα χάνει το 25% της αρχικής κινητικής του ενέργειας. Το συνημίτονο της γωνίας θ είναι

α. $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β. $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

γ. $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει μάζα $2m$ και ταχύτητα V . Το σύστημα λόγω της κρούσης χάνει το 25% και μένει με το 75% της αρχικής κινητικής του ενέργειας.

$$K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} 2mV^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} mu^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$2mV^2 = \frac{3}{4} 2mu^2 \quad \text{ή} \quad V = u \frac{\sqrt{3}}{2}$$

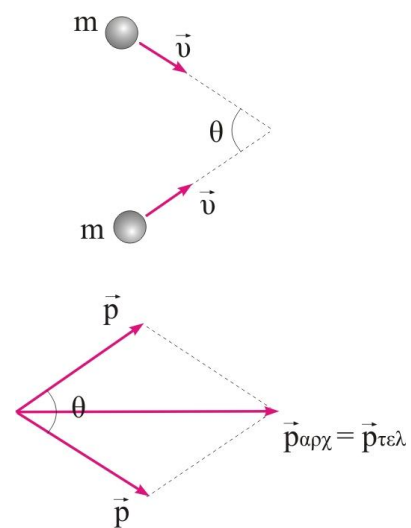
Το μέτρο της τελικής ορμής του συσσωματώματος είναι

$$p_{\text{τελ}} = 2mV = 2mu \frac{\sqrt{3}}{2} = mu\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad p_{\text{τελ}} = p\sqrt{3}$$

Το μέτρο της αρχικής ορμής του συστήματος βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλογράμου.

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{p^2 + p^2 + 2p^2 \cos \theta} \quad \text{ή} \quad p_{\text{αρχ}} = \sqrt{2p^2 + 2p^2 \cos \theta}$$

Η αρχή διατήρησης της ορμής δίνει:



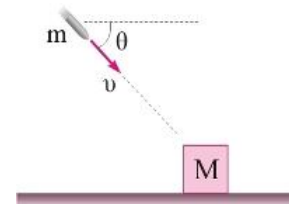
διάγραμμα ορμών

$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow p\sqrt{3} = \sqrt{2p^2 + 2p^2 \cos \theta} \Rightarrow (p\sqrt{3})^2 = 2p^2 + 2p^2 \cos \theta \quad \text{ή}$$

$$3p^2 = 2p^2 (1 + \cos \theta) \quad \text{ή} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 37. Νέο

Το βλήμα μάζας m του σχήματος κινούμενο με ταχύτητα μέτρου u και σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς τον ορίζοντα, συγκρούεται πλαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας M , που ισορροπεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος βλήμα-ξύλο κατά την κρούση

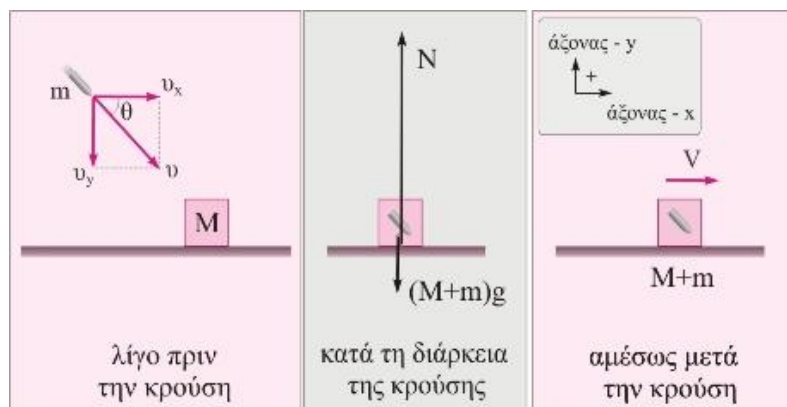


- α. είναι μηδέν.
- β. έχει μέτρο $mu\eta\mu\phi$ και φορά κατακόρυφη προς τα πάνω.
- γ. έχει μέτρο $(M+m)u\eta\mu\phi$ και φορά κατακόρυφη προς τα πάνω.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).



Ισχύει η αρχή της διατήρησης της ορμής μόνο στον άξονα- x . Στον άξονα- y κατά την ενσφήνωση του βλήματος, το συσσωμάτωμα δεν έχει τη δυνατότητα να κινηθεί λόγω της ισχυρότατης εξωτερικής δύναμης που δέχεται από το δάπεδο. Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος κατά την κρούση οφείλεται μόνο στη μεταβολή της ορμής κατά τον άξονα- y .

Πριν την κρούση η ορμή του συστήματος στον άξονα- y είναι :

$$p_{y(\text{αρχ})} = -mu_y = -m \cdot u\eta\mu\phi$$

Μετά την κρούση η ορμή του συστήματος στον άξονα- y είναι :

$p_{y(\text{τελ.})} = 0$ αφού το συσσωμάτωμα κινείται οριζόντια.

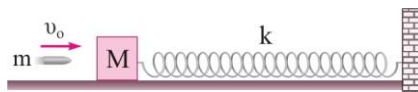
Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος κατά την κρούση είναι :

$$\Delta p = \Delta p_y = 0 - (-m \cdot v_{\eta\mu\phi}) \quad \text{ή} \quad \Delta p = m \cdot v_{\eta\mu\phi}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι το Δp έχει φορά προς τα πάνω.

Ερώτηση 38.

Το βλήμα μάζας m του σχήματος κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα v_0 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το ακίνητο σώμα, μάζας M , που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα, μάζας M , είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και η άλλη άκρη του είναι ακλόνητα στερεωμένη. Μετά την κρούση, η μέγιστη κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι ίση με το $1/5$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος. Ο



λόγος των μαζών $\frac{m}{M}$ είναι

α. $1/2$.

β. $2/3$.

γ. $1/4$.

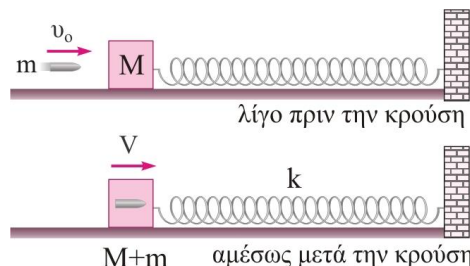
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Μετά την κρούση, η μέγιστη κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι ίση με το $1/5$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος, επομένως

$$K_{\text{συσ}} = \frac{1}{5} K_{\text{βλ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} (M+m) V^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{2} m v_0^2, \quad (1)$$



Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα-σώμα.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \quad \text{ή} \quad m v_0 = (M+m) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m v_0}{M+m}, \quad (2)$$

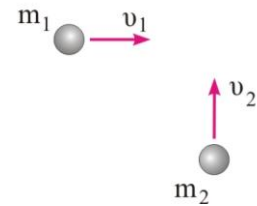
Συνδυάζοντας τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{m v_0}{M+m} \right)^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{ή} \quad \frac{m}{M+m} = \frac{1}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$$

Ερώτηση 39.

Τα σώματα του σχήματος κινούνται οριζόντια σε κάθετες διευθύνσεις. Το ένα σώμα έχει μάζα m_1 και ταχύτητα μέτρου u_1 . Το άλλο σώμα έχει μάζα $m_2=4m_1$ και ταχύτητα

μέτρου $u_2 = \frac{u_1}{3}$. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου



α. $\frac{u_1}{3}$.

β. $\frac{2u_1}{3}$.

γ. u_1 .

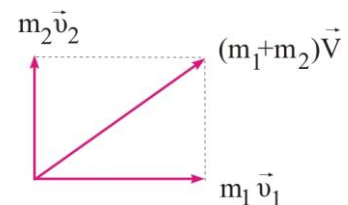
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Μετά την πλαστική κρούση, το συσσωμάτωμα έχει μάζα $m_1+m_2=5m_1$ και ταχύτητα μέτρου V , άρα η ολική ορμή του συστήματος μετά την κρούση έχει μέτρο

$$p_{\text{τελ}} = 5m_1 V$$



διάγραμμα ορμών

Η ολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση έχει μέτρο που βρίσκεται με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{(m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2} = \sqrt{(m_1 u_1)^2 + \left(4m_1 \frac{u_1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(m_1 u_1)^2} \Rightarrow p_{\text{αρχ}} = \frac{5}{3} m_1 u_1$$

Η διατήρηση της ορμής για την κρούση δίνει:

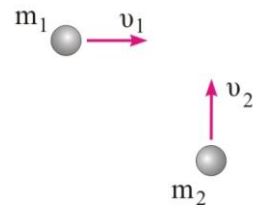
$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow 5m_1 V = \frac{5}{3} m_1 u_1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} u_1$$

Ερώτηση 40.

Τα σώματα του σχήματος κινούνται οριζόντια σε κάθετες διευθύνσεις. Το ένα σώμα έχει μάζα m_1 και ταχύτητα μέτρου u_1 . Το

άλλο σώμα έχει μάζα $m_2=4m_1$ και ταχύτητα μέτρου $u_2 = \frac{u_1}{3}$. Οι

σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο μαζών που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση είναι



α. $\frac{800}{13}\%$.

β. $\frac{500}{13}\%$.

γ. 62,5%.

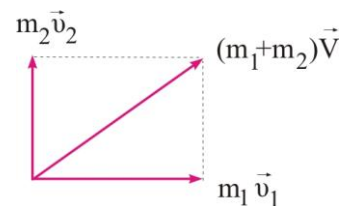
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Μετά την πλαστική κρούση, το συσσωμάτωμα έχει μάζα $m_1+m_2=5m_1$ και ταχύτητα μέτρου V , άρα η ολική ορμή του συστήματος μετά την κρούση έχει μέτρο

$$p_{\text{τελ}} = 5m_1V$$



διάγραμμα ορμών

Η ολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση έχει μέτρο που βρίσκεται με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{(m_1u_1)^2 + (m_2u_2)^2} = \sqrt{(m_1u_1)^2 + \left(4m_1\frac{u_1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(m_1u_1)^2} \Rightarrow p_{\text{αρχ}} = \frac{5}{3}m_1u_1$$

Η διατήρηση της ορμής για την κρούση δίνει:

$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow 5m_1V = \frac{5}{3}m_1u_1 \Rightarrow V = \frac{1}{3}u_1$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση ισούται με τη διαφορά μεταξύ της αρχικής και τελικής κινητικής ενέργειας του συστήματος.

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} 4m_1 \left(\frac{v_1}{3} \right)^2 \Rightarrow K_{αρχ} = \frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

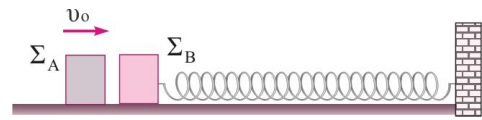
$$K_{τελ} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} 5m_1 \left(\frac{v_1}{3} \right)^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{K_{αρχ} - K_{τελ}}{K_{αρχ}} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{\frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{800}{13} \%$$

Ερώτηση 41.

Το σώμα Σ_B μάζας M βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού οριζώντιου ελατηρίου που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το σώμα Σ_A μάζας m , του σχήματος, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα u_0 κτυπά κεντρικά στο ακίνητο σώμα μάζας M . Για να έχουμε την ίδια μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου είτε η κρούση είναι ελαστική είτε πλαστική, θα πρέπει ο λόγος των μαζών m/M να είναι



α. 1.

β. 2.

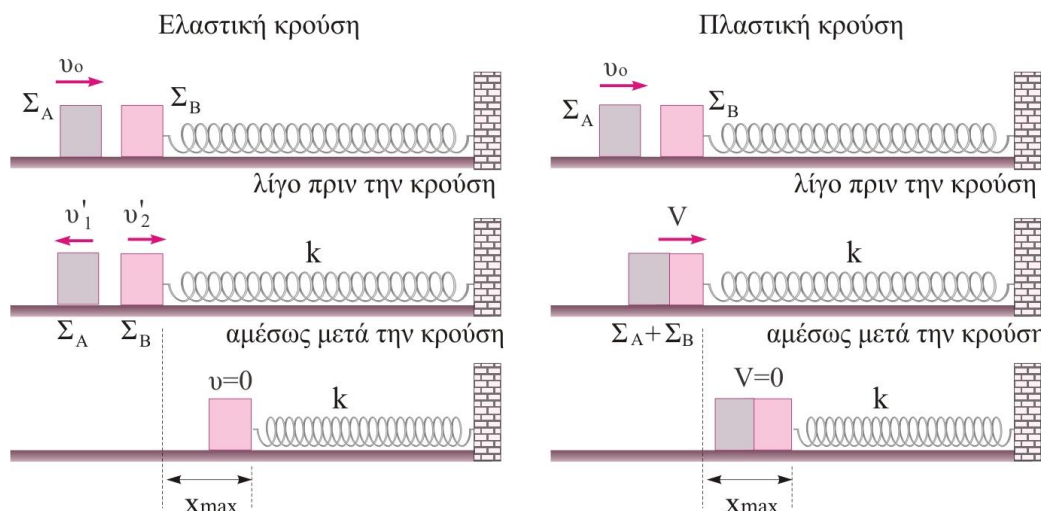
γ. 3.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ίδια μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, δηλώνει ίδια $U_{ελ(max)}$ και ίδια ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος, καθώς το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Όμως, $E_T = U_{max} = K_{max}$



Συμβολίζουμε με v'_2 την ταχύτητα του σώματος Σ_B μετά την ελαστική κρούση και με V την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Για τις κινητικές ενέργειες στις δύο περιπτώσεις ισχύει:

$$K_{ελ(max)} = K_{πλ(max)} \Rightarrow \frac{1}{2} M v_2'^2 = \frac{1}{2} (M + m) V^2 \quad (1)$$

Αν η κρούση είναι ελαστική, το σώμα Σ_B θα έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα μέτρου v_2' η οποία δίνεται από τη σχέση

$$v_2' = \frac{2m}{m + M} v_o$$

(2)

Αν η κρούση είναι πλαστική, το συσσωμάτωμα $\Sigma_A + \Sigma_B$ θα έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα μέτρου V , η οποία υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση.

$$p_{πριν} = p_{μετα} \quad \text{ή} \quad m v_o = (M + m) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m v_o}{M + m} \quad (3)$$

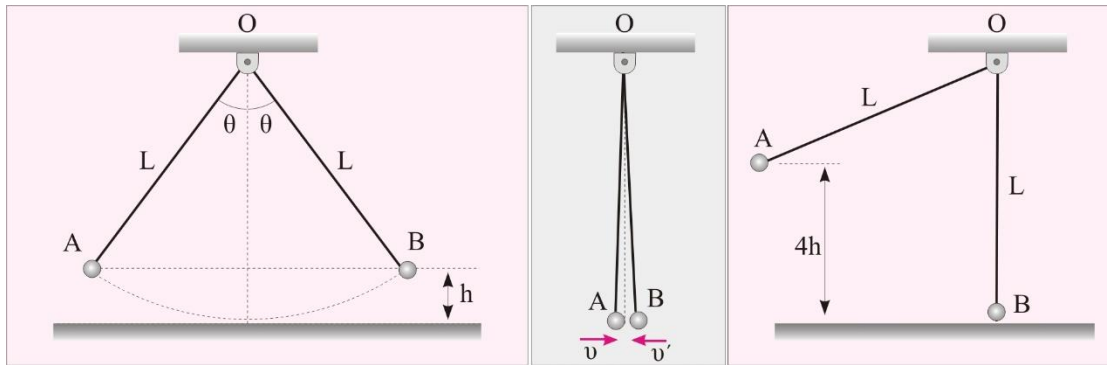
Με αντικατάσταση των (2) και (3) στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{2m}{m + M} v_o \right)^2 = \frac{1}{2} (M + m) \cdot \left(\frac{m v_o}{M + m} \right)^2 \quad \text{ή}$$

$$M \cdot \frac{4m^2 v_o^2}{(m + M)^2} = (M + m) \cdot \frac{m^2 v_o^2}{(m + M)^2} \quad \text{ή} \quad 4M = M + m \quad \text{ή} \quad \frac{m}{M} = 3$$

Ερώτηση 42.

Τα σφαιρίδια Σ_A , μάζας m_A και Σ_B , μάζας m_B , του σχήματος, είναι δεμένα στις άκρες μη ελαστικών νημάτων ίδιου μήκους. Τα σφαιρίδια ελευθερώνονται ταυτόχρονα με τα νήματα τεντωμένα από θέσεις συμμετρικές ως προς την κατακόρυφο που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας τους (βλέπε σχήμα) και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά στη θέση ισορροπίας τους.



Μετά την κρούση, το σφαιρίδιο A επιστρέφει πίσω και εκτελώντας κυκλική τροχιά φτάνει σε μέγιστο ύψος τετραπλάσιο από αυτό που ελευθερώθηκε. Ο λόγος των μαζών

$$\frac{m_A}{m_B} \text{ είναι}$$

α. $1/2$.

β. $1/3$.

γ. $1/4$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

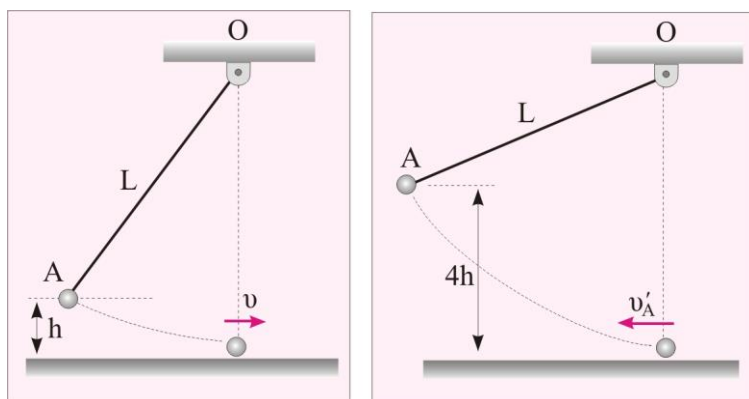
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Τα σφαιρίδια αφήνονται από το ίδιο ύψος και όταν φτάσουν στο σημείο κρούσης θα έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου u , το οποίο υπολογίζεται με εφαρμογή του θεωρήματος έργου ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων.

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \quad \text{ή}$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad , \quad (1)$$



Το σφαιρίδιο Σ_A , μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα u'_A και ανέρχεται σε ύψος $4h$.
 Οπότε το θεώρημα έργου ενέργειας δίνει για την ταχύτητα του Σ_A , μετά την κρούση

$$0 - \frac{1}{2} m u_A'^2 = -4mgh \quad \text{ή} \quad u_A'^2 = 8gh \quad \Rightarrow u'_A = 2\sqrt{2gh}, \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1), (2) προκύπτει ότι τα μέτρα των δύο ταχυτήτων του Σ_A πριν και μετά την κρούση συνδέονται με τη σχέση $u_A' = 2u$ (3)

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε η σφαίρα Α αμέσως μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα u_A' για την οποία ισχύει:

$$u'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} u + \frac{2m_B}{m_A + m_B} (-u) \Rightarrow u'_A = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} u$$

Η οποία με τη βοήθεια της σχέσης (3) μας δίνει:

$$u'_A = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} u \Rightarrow -2u = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} u \Rightarrow -2(m_A + m_B) = m_A - 3m_B \quad \text{ή} \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{3}.$$