

1.

4.1. Ισχύει:

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\Gamma}}{2 \cdot R_{\Gamma}}} = \sqrt{g_0 \cdot R_{\Gamma}} = 8 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 6**

4.2. Ισχύει:

$$K = 16 \cdot |U|, \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 16 \cdot \frac{G \cdot M_{\Gamma} \cdot m}{R_{\Gamma} + h}, \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 16 \cdot \frac{g_0 \cdot R_{\Gamma}^2 \cdot m}{2 \cdot R_{\Gamma}},$$
$$v = \sqrt{16 \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma}} = 32 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

Ισχύει:  $v > v_{\delta}$  και συνεπώς το σώμα Σ θα διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

**Μονάδες 6**

4.3. Η μηχανική ενέργεια του σώματος Σ διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησής του, επειδή η μοναδική δύναμη που του ασκείται είναι η βαρυτική έλξη της Γης, δύναμη που είναι συντηρητική. Έτσι:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda}, K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda}, \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{\Gamma} \cdot m}{R_{\Gamma} + h} = K_{\tau\epsilon\lambda} + 0,$$
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot 16 \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma} - \frac{g_0 \cdot R_{\Gamma}^2 \cdot m}{2 \cdot R_{\Gamma}} = K_{\tau\epsilon\lambda}, K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{15}{2} \cdot m \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma} = 1,92 \cdot 10^9 J$$

**Μονάδες 6**

4.4. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$W_{\vec{w}} = \Delta K = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = K_{\tau\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 16 \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma} =$$
$$= 1,92 \cdot 10^9 J - 2,048 \cdot 10^9 J = -1,28 \cdot 10^8 J$$

**Μονάδες 7**

2.

4.1. Ισχύει:

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma}} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 6**

4.2. Ισχύει:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma} = m \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma}$$
$$U = - G \cdot \frac{M_{\Gamma} \cdot m}{R_{\Gamma}} = - m \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma}$$

Συνεπώς:  $K = - U$ .

**Μονάδες 6**

4.3.  $E_{\tau\epsilon\lambda} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} = 0 + 0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

4.4. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$W_{\vec{w}} = \Delta K = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\delta}^2 = - 2,56 \cdot 10^8 J$$

**Μονάδες 7**

3.

4.1. Για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο υλικών σημείων ισχύει:

$$U_{\eta\lambda} = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} J = 0,9 J$$

**Μονάδες 6**

4.2. Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, αφού είναι μονωμένο. Από την αρχή διατήρησης της ορμής, με θετική φορά τη φορά κίνησης του πρώτου υλικού σημείου:

$$0 = m \cdot v_1 - m \cdot v_2, \frac{v_1}{v_2} = 1$$

**Μονάδες 6**

4.3. Η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική, συνεπώς η μηχανική ενέργεια του συστήματος των υλικών σημείων διατηρείται σταθερή:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda}, K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda}, 0 + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + 0, \\ U_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2, U_{\alpha\rho\chi} = m \cdot v^2, v = \sqrt{\frac{U_{\alpha\rho\chi}}{m}} = 3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 7**

4.4. Από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας ισχύει:

$$\Delta K_1 = W_{\vec{F}_{1,2}}, K_1 - 0 = W_{\vec{F}_{1,2}}, W_{\vec{F}_{1,2}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = 0,45 J$$

**Μονάδες 6**

4.

4.1.

$$\text{ισχύει: } U = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{10^{-1}} J = 0,09 J$$

**Μονάδες 6**

4.2. Ισχύει:

$$\sum V = V_A + V_B = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1}{\frac{r}{2}} + k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_2}{\frac{r}{2}} = 4 \cdot k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1}{r} = 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-1}} V = 3,6 \cdot 10^5 V$$

**Μονάδες 6**

$$\text{4.3. Ισχύει: } W_{\vec{w}} \left( M \xrightarrow{q} \infty \right) = \sum V \cdot q = 3,6 \cdot 10^5 \cdot (-1) \cdot 10^{-6} J = -0,36 J$$

**Μονάδες 6**

4.4. Η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική δύναμη και συνεπώς η μηχανική ενέργεια του βλήματος διατηρείται σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του. Έτσι:

$$E_M = E_\infty, U_M + K_M = U_\infty + K_\infty, \sum V \cdot q + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = 0 + 0, v_0 = \sqrt{\frac{-2 \cdot \sum V \cdot q}{m}} = 10^2 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 7**



5.

4.1. Η βαρυτική έλξη  $\vec{F}_g$  που δέχεται το σώμα μάζας  $m_1$  από τη Γη δρα σαν κεντρομόλος:

$$F_g = F_k \Rightarrow G \frac{M_\Gamma \cdot m_1}{(R_\Gamma + h)^2} = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{R_\Gamma + h}$$

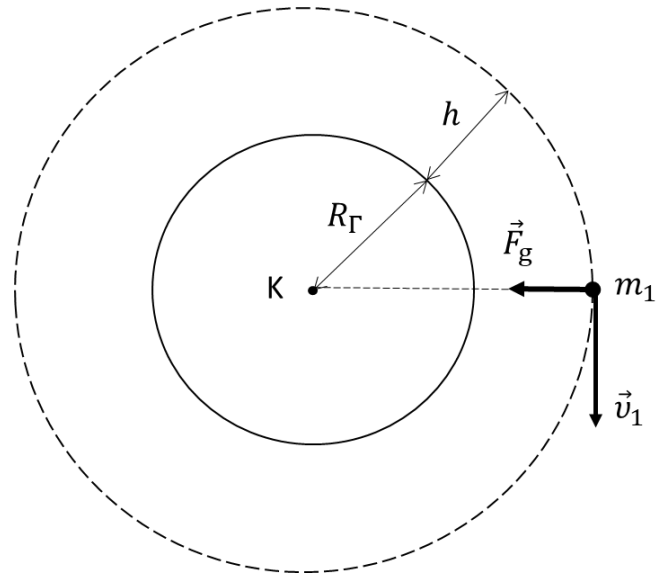
Επομένως,

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{\frac{16}{9} R_\Gamma}} \Rightarrow v_1 = \frac{3}{4} \sqrt{g_0 R_\Gamma}$$

$$\text{Άρα, } v_1 = 6 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της ταχύτητας περιστροφής του σώματος είναι ανεξάρτητο από τη μάζα του. Το σώμα μάζας  $m_2$  περιστρέφεται στο ίδιο ύψος, επομένως:

$$v_2 = v_1 = 6 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$



**Μονάδες 6**

4.2. Η περίοδος περιστροφής του σώματος μάζας  $m_1$  είναι ίση με:

$$T_1 = \frac{2\pi(R_\Gamma + h)}{v_1} \Rightarrow T_1 = \frac{32\pi R_\Gamma}{9v_1} \Rightarrow T_1 = 11915 \text{ s}$$

Όμοια,  $T_2 = T_1 = 11915 \text{ s}$ .

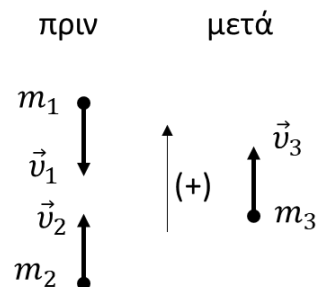
**Μονάδες 6**

4.3. Κατά τη διάρκεια της πλαστικής κρούσης το σύστημα είναι μονωμένο στη διεύθυνση που κινούνται τα σώματα. Έστω  $m_3 = m_1 + m_2 = 3m_1$ , η μάζα του συσσωματώματος.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την πλαστική κρούση.

$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow -m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_3 v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{v_1}{3}$$

$$\text{Επομένως, } v_3 = 2 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$



**Μονάδες 6**

4.4. Η ταχύτητα διαφυγής στη θέση που δημιουργείται το συσσωμάτωμα είναι ίση με:

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \Rightarrow v_\delta = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{\frac{16}{9} R_\Gamma}} \Rightarrow v_\delta = \frac{3}{4} \sqrt{2g_0 R_\Gamma} \Rightarrow v_\delta = 6\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

Παρατηρούμε ότι,  $v_3 < v_\delta$ , επομένως το συσσωμάτωμα δεν διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

**Μονάδες 7**

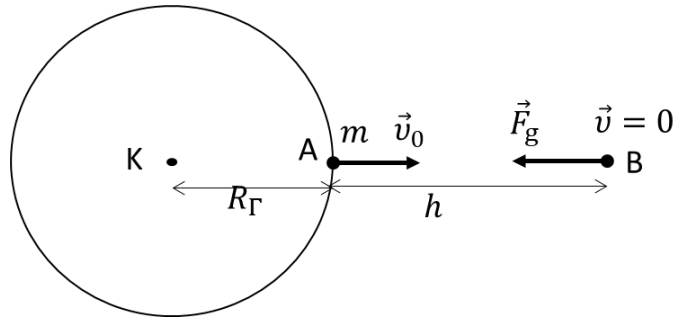
6.

4.1. Η βαρυτική έλξη  $\vec{F}_g$  είναι η μόνη δύναμη που δέχεται το σώμα κατά την κίνησή του από το Α στο Β. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας.

$$\Delta K = W_{(A) \rightarrow (B)} \Rightarrow \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m \left( -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m v_0^2 = m \left( -\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma} + \frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2}{8R_\Gamma} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{7}{8} m \cdot g_0 \cdot R_\Gamma \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{7}{4} g_0 R_\Gamma} \Rightarrow v_0 = 4\sqrt{7} \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$



**Μονάδες 6**

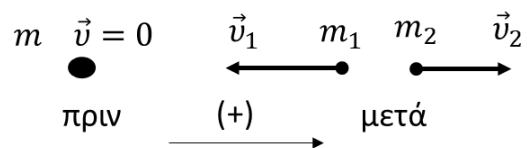
4.2. Η βαρυτική έλξη  $\vec{F}_g$  είναι η μόνη δύναμη που δέχεται το κομμάτι μάζας  $m_2$  κατά την κίνησή του από το Β μέχρι το άπειρο. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας.

$$\Delta K = W_{(B) \rightarrow (\infty)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_\infty^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 \left( -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h} \right) \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{g_0 R_\Gamma}{4}} \Rightarrow v_2 = 5 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Κατά τη διάρκεια της διάσπασης το σύστημα θεωρείται μονωμένο.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής.



$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \cong 0 \Rightarrow \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow 0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} \Rightarrow v_1 = 12 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

Η βαρυτική έλξη  $\vec{F}_g$  είναι η μόνη δύναμη που δέχεται το κομμάτι μάζας  $m_1$  κατά την κίνησή του από το Β μέχρι το Α. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας.

$$\Delta K = W_{(B) \rightarrow (A)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_3^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 \left( -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \right) \Rightarrow v_3 = \sqrt{v_1^2 + \frac{7g_0 R_\Gamma}{4}}$$

$$\text{Επομένως, } v_3 = 16 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 8**

4.4. Σύμφωνα με τη γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής:

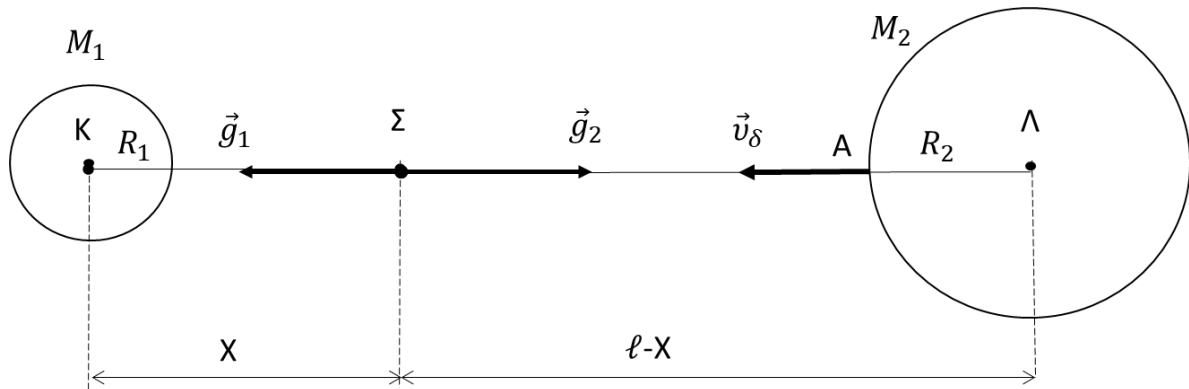
$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_g$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς το κέντρο της Γης και μέτρο:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{GM_\Gamma m_1}{(R_\Gamma + h_1)^2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_1 g_0}{4} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 25 \text{ N}$$

**Μονάδες 5**

7.



4.1. Στο σημείο Σ η συνολική ένταση του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών έχει δύο συνιστώσες, την  $\vec{g}_1$  λόγω του πλανήτη  $\Pi_1$  και την  $\vec{g}_2$  λόγω του πλανήτη  $\Pi_2$ , επομένως:

$$\vec{g}_\Sigma = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow \frac{GM_1}{X^2} = \frac{GM_2}{(\ell - X)^2} \Rightarrow \frac{M_1}{X^2} = \frac{9M_1}{(\ell - X)^2} \Rightarrow (\ell - X)^2 = 9X^2 \Rightarrow X = \frac{\ell}{4}$$

Επομένως,  $X = 10 R_1 \Rightarrow X = 10^6 m$

**Μονάδες 6**

4.2. Το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών στο σημείο Σ είναι ίσο με:

$$V_\Sigma = V_1 + V_2 \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{GM_1}{X} - \frac{GM_2}{\ell - X} \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{g_{0,1}R_1^2}{10R_1} - \frac{9g_{0,1}R_1^2}{30R_1} \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{4g_{0,1}R_1}{10} \Rightarrow V_\Sigma = -24 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg}.$$

**Μονάδες 6**

4.3. Το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών στο σημείο Α είναι ίσο με:

$$V_A = V_1 + V_2 \Rightarrow V_A = -\frac{GM_1}{\ell - R_2} - \frac{GM_2}{R_2} \Rightarrow V_A = -\frac{g_{0,1}R_1^2}{30R_1} - \frac{9g_{0,1}R_1^2}{10R_1} \Rightarrow V_A = -\frac{28g_{0,1}R_1}{30} \Rightarrow V_A = -56 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg}.$$

Η ελάχιστη ταχύτητα  $\vec{v}_\delta$  με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε ένα σώμα μάζας  $m = 3 Kg$  από την επιφάνεια του πλανήτη  $\Pi_2$  για να φτάσει στον πλανήτη  $\Pi_1$  αντιστοιχεί σε μηδενική ταχύτητα του σώματος στο σημείο Σ αφού στη συνέχεια θα επιταχυνθεί προς την επιφάνεια του πλανήτη  $\Pi_1$  λόγω της ισχυρότερης βαρυτικής έλξης που δέχεται από αυτόν.

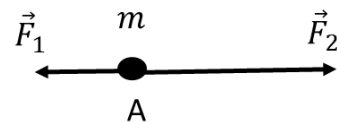
Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ από το Α στο Σ.

$$\Delta K = W_{(A) \rightarrow (\Sigma)} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_\delta^2 = m(V_A - V_\Sigma) \Rightarrow v_\delta = \sqrt{2(V_\Sigma - V_A)} \Rightarrow v_\delta = 800 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 8**

4.4. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας  $m$  αμέσως μετά την εκτόξευσή του από τον πλανήτη  $\Pi_2$  είναι ίσος με τη συνισταμένη βαρυτική έλξη που δέχεται στο σημείο Α.

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = F_2 - F_1 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{GM_2 m}{R_2^2} - \frac{GM_1 m}{(\ell - R_2)^2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9GM_1 m}{100R_1^2} - \frac{GM_1 m}{900R_1^2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9g_{0,1}R_1^2 m}{100R_1^2} - \frac{g_{0,1}R_1^2 m}{900R_1^2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{8mg_{0,1}}{90} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1,6 N$$

**Μονάδες 5**

## 8.

**4.1.** Το βάρος του δορυφόρου παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$F = F_k \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot u^2}{r} \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_\Gamma}{r} = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{G \cdot M_\Gamma}{r}} \quad (1)$$

όπου  $M_\Gamma$  η μάζα της Γης και  $r = R_\Gamma + h = 4R_\Gamma$  η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Οι δύο δορυφόροι κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά, άρα έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Για την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης έχουμε το

$$g_0 = \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow G \cdot M_\Gamma = g_0 \cdot R_\Gamma^2 \quad (2)$$

και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$u = \sqrt{\frac{G \cdot M_\Gamma}{r}} = u = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2}{4 R_\Gamma}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_\Gamma}{4}} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ m}}{4}} \Leftrightarrow u = 4000 \text{ m/s}$$

άρα και οι δύο δορυφόροι έχουν μέτρο ταχύτητας  $u = 4000 \text{ m/s}$

**Μονάδες 6**

**4.2.** Η περίοδος περιφοράς του κάθε δορυφόρου υπολογίζεται από τη σχέση

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{u}$$

που από τον τύπο παρατηρώ ότι εξαρτάται από την ταχύτητα  $u$  του κάθε δορυφόρου καθώς και από την ακτίνα  $r$  της κυκλικής τροχιάς. Οι δορυφόροι κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά, άρα έχουν ίδια μέτρα ταχυτήτων και ίδια ακτίνα  $r$ .

Η περίοδος

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{u} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4R_\Gamma}{u} \Leftrightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ m}}{4000 \text{ m/s}} \Leftrightarrow T = 12800 \cdot \pi \text{ s}$$

**Μονάδες 6**

**4.3.** Οι δύο δορυφόροι κινούνται αντίρροπα και συναντιούνται μετά από χρόνο  $t$ . Στο χρόνο αυτό οι δύο δορυφόροι έχουν διανύσει ίσα μήκη τόξων  $s_1 = s_2 = u \cdot t$ .

Το άθροισμα των μηκών των τόξων, που διανύουν οι δορυφόροι είναι ίσο με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου στην οποία κινούνται οι δορυφόροι.

Δηλαδή:

$$s_1 + s_2 = 2\pi \cdot r \Leftrightarrow u \cdot t + u \cdot t = 2\pi \cdot r \Leftrightarrow 2u \cdot t = 2\pi \cdot r \Leftrightarrow t = \frac{2\pi r}{2 \cdot u} \Leftrightarrow t = \frac{\pi r}{u} \Leftrightarrow t = \frac{\pi \cdot 4R_\Gamma}{u}$$

$$t = 4\pi \cdot \frac{6400 \cdot 10^3 \text{ m}}{4000 \text{ m/s}} \Leftrightarrow t = 6400 \cdot \pi \text{ s}$$

**Μονάδες 6**

**4.4.** Στην οριζόντια διεύθυνση (διεύθυνση κίνησης) στην διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα των οχημάτων, οπότε για το σύστημα θα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Συνεπώς σε όλη τη διάρκεια της κρούσης η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται.

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi\sigma\nu\sigma} = \vec{P}_{\tau\epsilon\lambda\sigma\nu\sigma}$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{\sigma\nu\sigma}$$

$$m \cdot u - m \cdot u = (m + m) \cdot u_{\sigma\nu\sigma}$$

$$0 = 2 \cdot m \cdot u_{\sigma\nu\sigma} \Leftrightarrow u_{\sigma\nu\sigma} = 0$$

Από την αρχή διατήρησης ενέργειας έχω:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = K_{\sigma\nu\sigma\pi\rho\nu} - K_{\sigma\nu\sigma\mu\epsilon\tau\alpha}$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = K_1 + K_2 - K_{\sigma\nu\sigma} \xleftrightarrow{K_{\sigma\nu\sigma}=0}$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = K_1 + K_2$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{1}{2} m \cdot u^2 + \frac{1}{2} m \cdot u^2$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 2 \frac{1}{2} m \cdot u^2 \Leftrightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda} = m \cdot u^2$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 100kg \cdot \left(4000 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 10^2 kg \cdot \left(4 \cdot 10^3 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 10^2 kg \cdot 16 \cdot 10^6 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 16 \cdot 10^8 J$$

**Μονάδες 7**

## 9.

**4.1.** Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ύψος  $h = 3R_F$  από την επιφάνεια της γης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$g = G \frac{M_F}{(R_F + h)^2}.$$

Αντικαθιστώ στον τύπο του ύψους  $h = 3R_F$ . Έτσι έχω

$$g = \frac{G \cdot M_F}{(R_F + 3R_F)^2} \Leftrightarrow g = \frac{G \cdot M_F}{(4R_F)^2} \Leftrightarrow g = \frac{G \cdot M_F}{16R_F^2} \quad (1)$$

Για την ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης έχω

$$g_0 = \frac{G \cdot M_F}{R_F^2} \Leftrightarrow G \cdot M_F = g_0 \cdot R_F^2 \quad (2)$$

$$\text{Έχω } g = \frac{G \cdot M_F}{16R_F^2} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} g = \frac{g_0 \cdot R_F^2}{16R_F^2} \Leftrightarrow g = \frac{1}{16} g_0 \Leftrightarrow g = \frac{1}{16} 10 \text{ m/s}^2 \Leftrightarrow g = \frac{5}{8} \text{ m/s}^2$$

**Μονάδες 6**

**4.2.** Το βάρος του δορυφόρου, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$F = F_k \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_F \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot u^2}{r} \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_F}{r} = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{G \cdot M_F}{r}} \quad (1)$$

όπου  $M_F$  η μάζα της Γης και  $r = R_F + h = 4R_F$ , η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Για την επιτάχυνση στην επιφάνεια της Γης έχουμε:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_F}{R_F^2} \Leftrightarrow G \cdot M_F = g_0 \cdot R_F^2 \quad (2)$$

και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$u = \sqrt{\frac{G \cdot M_F}{r}} = u = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_F^2}{4R_F}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_F}{4}} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ m}}{4}} \Leftrightarrow u = 4000 \text{ m/s}$$

**Μονάδες 6**

**4.3.** Η μηχανική ενέργεια του σώματος Σ, ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας είναι ίση:

$$E_M = K + U = \frac{1}{2} m \cdot u^2 + \left( -G \frac{M_F \cdot m}{r} \right) = \frac{1}{2} m \left( \sqrt{G \frac{M_F}{r}} \right)^2 - G \frac{M_F \cdot m}{r}$$

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{m \cdot G \cdot M_F}{r} - \frac{m \cdot G \cdot M_F}{r} \Leftrightarrow E_M = -\frac{m \cdot G \cdot M_F}{2r} \quad (3)$$

Αντικαθιστώ στην σχέση (3) όπου  $G \cdot M_F = g_0 R_F^2$  και όπου  $r = 4R_F$  και έτσι έχω:

$$E_M = -\frac{g_0 \cdot m \cdot R_F^2}{2 \cdot 4 \cdot R_F} \Leftrightarrow E_M = -\frac{1}{8} g_0 \cdot m \cdot R_F \Leftrightarrow E_M = -\frac{1}{8} 4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ m} = -32 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Άρα:  $E_M = -32 \cdot 10^6 \text{ J}$

**Μονάδες 6**

**4.4.** Η ελάχιστη ενέργεια  $E_{\text{προσφ}}$  είναι αυτή η οποία θα επιτρέψει στο σώμα να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα.

Από την αρχή διατήρηση ενέργειας για το σώμα Σ θα πάρουμε:

$$E_{M(\alpha\rho\chi)} + E_{\text{προσφ}} = E_{M(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$E_M + E_{\text{προσφ}} = K_{\infty} + U_{\infty}$$

$$E_M + E_{\text{προσφ}} = 0$$

$$E_{\text{προσφ}} = - E_M$$

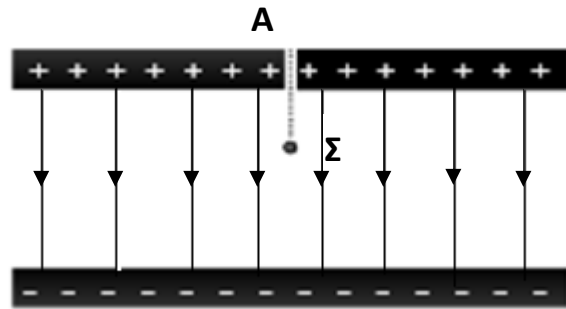
$$E_{\text{προσφ}} = - (-32 \cdot 10^6 \text{J})$$

$$E_{\text{προσφ}} = 32 \cdot 10^6 \text{J}$$

**Μονάδες 7**

4.1.

$$\begin{aligned} F_{\eta\lambda} &= qE = (1,5 \times 10^{-8} \text{ C}) \left( 60 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \right) = \\ &= (1,5 \times 10^{-8} \text{ C}) \left( 60 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \\ &= 9 \times 10^{-4} \text{ N} \end{aligned}$$

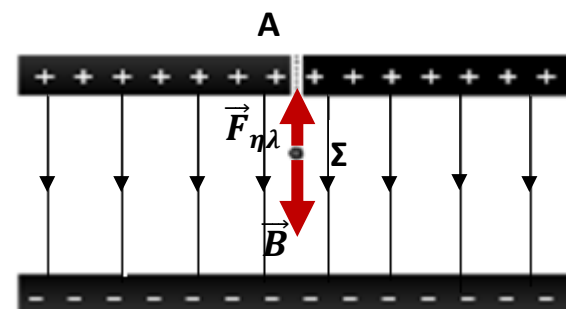


Μονάδες 5

4.2. Η σταγόνα δέχεται το βάρος της προς τα κάτω και την ηλεκτρική δύναμη προς τα επάνω (η ίδια είναι αρνητικά φορτισμένη, οπότε έλκεται από τον θετικό σπλισμό). (2 μονάδες)

Το βάρος της σταγόνας είναι  $B = mg = (0,1 \text{ g}) \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = (0,1 \times 10^{-3} \text{ kg}) \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 10 \times 10^{-4} \text{ N}$  (1 μονάδα)

Το βάρος είναι μεγαλύτερο από την ηλεκτρική δύναμη σε μέτρο, άρα η σταγόνα θα επιταχυνθεί **προς τα κάτω** (1 μονάδα). Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (2 μονάδες):



$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{B - F_{\eta\lambda}}{m} = \frac{10 \times 10^{-4} \text{ N} - 9 \times 10^{-4} \text{ N}}{0,1 \times 10^{-3} \text{ kg}} = 1 \text{ m/s}^2$$

Μονάδες 6

4.3. Η ηλεκτρική δύναμη κάνει αρνητικό έργο, αφού είναι αντίθετη (ασκείται κατακόρυφα προς τα επάνω) στην κίνηση του σώματος (η οποία γίνεται κατακόρυφα προς τα κάτω). (Ισοδύναμα,  $\sin\theta = \sin 180^\circ = -1$  για αντικατάσταση στον τύπο του έργου) (2 μονάδες). Υπολογισμός (4 μονάδες):

$$W_{F_{\eta\lambda}} = -F_{\eta\lambda}d = -(9 \times 10^{-4} \text{ N})(10 \text{ mm}) = -(9 \times 10^{-4} \text{ N})(10 \times 10^{-3} \text{ m}) = -9 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Μονάδες 6

4.4. Από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} &= W_{o\lambda} = \Sigma Fd = (10 \times 10^{-4} \text{ N} - 9 \times 10^{-4} \text{ N})(10 \text{ mm}) = (10^{-4} \text{ N})(10 \times 10^{-3} \text{ m}) \\ &= 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

ή με διαφορετικό τρόπο υπολογισμού:  $K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} = W_B + W_{F_{\eta\lambda}} = mgd + W_{F_{\eta\lambda}} =$

$$(0,1 \times 10^{-3} \text{ kg}) \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \times 10^{-3} \text{ m}) + (-9 \times 10^{-6} \text{ J}) = 10^{-6} \text{ J}$$

Μονάδες 8



## 10.

**4.1.** Το σύστημα είναι μονωμένο διότι δεν του ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται (1 μονάδα). Αρχικά τα δύο σωματίδια είναι ακίνητα, άρα η ορμή του συστήματος είναι μηδέν (1 μονάδα). Σε μία τυχαία χρονική στιγμή οι ταχύτητές τους θα έχουν μέτρα  $v_A$  και  $v_B$  αντίστοιχα, οπότε, με δεδομένο πως κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, λόγω άπωσης (και τα δύο είναι θετικά), η ορμή του συστήματος θα μπορεί να γραφτεί ως  $m_B v_B - m_A v_A$  (θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά στο σχήμα) (1 μονάδα).

Γράφοντας την αρχή διατήρησης ορμής:

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετά}$$

$$0 = m_B v_B - m_A v_A$$

$$m_B v_B = m_A v_A$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

άρα οι ταχύτητες είναι αντιστρόφως ανάλογες των μαζών (2 μονάδες)

### Μονάδες 5

**4.2.** Με δεδομένο πως η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb (συντηρητική δύναμη) η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται (1 μονάδα). Ως αποτέλεσμα, το άθροισμα ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας και κινητικής ενέργειας των δύο σωματιδίων στην αρχή είναι ίσο με το αντίστοιχο άθροισμα όταν τα δύο σωματίδια θα βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση (1 μονάδα). Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος σε πολύ μεγάλη απόσταση είναι μηδενική (1 μονάδα), ενώ η κινητική ενέργεια των δύο σωματιδίων στην αρχή ήταν επίσης μηδενική (1 μονάδα).

$$(U + K)_{αρχ} = (U + K)_{τελ}$$

$$U + 0 = 0 + K_A + K_B$$

Οι κινητικές ενέργειες των δύο σωματιδίων συνδέονται μέσω των ταχυτήτων τους, με βάση τη σχέση του ερωτήματος 4.1 (η οποία μπορεί να γραφεί ως  $v_A = v_B \frac{m_B}{m_A}$ ) (2 μονάδες):

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A \left( v_B \frac{m_B}{m_A} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_B^2}{m_A} v_B^2 = \frac{m_B}{m_A} \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{m_B}{m_A} K_B$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση που συνδέει τις ενέργειες και λύνοντας ως προς  $K_B$  προκύπτει το ζητούμενο (2 μονάδες):

$$U = \frac{m_B}{m_A} K_B + K_B$$

$$U = \left( \frac{m_B}{m_A} + 1 \right) K_B$$

$$U = \frac{m_B + m_A}{m_A} K_B$$

$$K_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} U$$

**4.3.** Το αποτέλεσμα του ερωτήματος 4.2 είναι πως

$$K_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} U$$

Αν ισχύει πως  $m_A \gg m_B$ , τότε  $m_A + m_B \cong m_A$  (2 μονάδες), άρα (2 μονάδες):

$$K_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} U \cong \frac{m_A}{m_A} U = U$$

Αν επανέλθουμε στην ενδιάμεση μορφή της διατήρησης μηχανικής ενέργειας που βρέθηκε στη διάρκεια της λύσης του 4.2 (3 μονάδες):

$$U = K_A + K_B$$

$$U = K_A + U$$

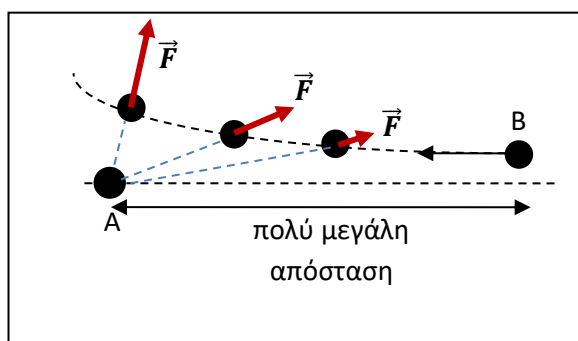
$$K_A = 0$$

(Εναλλακτικά, στη λύση του 4.2 βρέθηκε πως  $K_A = \frac{m_B}{m_A} K_B$ . Με δεδομένο πως  $m_A \gg m_B$ , ισχύει πως

$\frac{m_B}{m_A} \cong 0$ , άρα  $K_A = 0$ . Αντίστοιχα μπορεί κανείς να σκεφθεί πως  $v_A = v_B \frac{m_B}{m_A} \cong 0$ , οπότε πάλι  $K_A = 0$ )

**Μονάδες 7**

**4.4.** Τα δύο σωματίδια είναι θετικά άρα απωθούνται υπό την επίδραση της ηλεκτροστατικής δύναμης Coulomb  $\vec{F}$  η οποία δρα στην ευθεία που συνδέει τα δύο σωματίδια (2 μονάδες). Αυτό σημαίνει πως η κίνηση του σωματιδίου B θα αποκλίνει προς τα επάνω όπως φαίνεται στο σχήμα (1 μονάδα).



Το μέτρο της δύναμης Coulomb είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης (2 μονάδες), άρα μεγαλώνει όσο το σωματίδιο B κινείται προς τα αριστερά και αυτό οδηγεί στην μεγαλύτερη καμπύλωση της τροχιάς όσο το B πλησιάζει το A.

**Μονάδες 5**

11.

4.1. Απλή αντικατάσταση (5 μονάδες)  $g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{3,6 \times 10^{14} \text{ Nm}^2/\text{kg}}{(6 \times 10^6 \text{ m})^2} = 10 \text{ N/kg}$

Παρατηρούμε πως η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι όση και στη Γη (1 μονάδα).

**Μονάδες 6**

4.2. Η ακτίνα της τροχιάς του δορυφόρου θα είναι  $r = R + h = R + R = 2R$  (1 μονάδα).

Πρέπει η βαρυτική δύναμη να παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης (2 μονάδες):

$$F_k = F_{\beta\alpha\rho}$$

Αντικατάσταση και επίλυση (4 μονάδες):

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2R} &= \frac{GMm}{(2R)^2} \\ v &= \sqrt{\frac{GM}{2R}} \\ v &= \sqrt{\frac{3,6 \times 10^{14} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}}}{2(6 \times 10^6 \text{ m})}} \\ v &= \sqrt{0,3} \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 5500 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Μονάδες 7**

4.3. Εφόσον η κίνηση είναι ομαλή κυκλική:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi 2R}{T} \\ T &= \frac{4\pi R}{v} = \frac{4\pi(6 \times 10^6 \text{ m})}{5500 \text{ m/s}} \cong 1,4 \times 10^4 \text{ s} \end{aligned}$$

**Μονάδες 6**

4.4. Το έργο του βαρυτικού πεδίου για τη μετακίνηση μάζας  $m$  από σημείο Α σε σημείο Β του βαρυτικού πεδίου είναι (2 μονάδες)

$$W_{A \rightarrow B} = m(V_A - V_B)$$

Το βαρυτικό δυναμικό δίνεται από τον τύπο:  $V = -\frac{GM}{r}$

Για τον πύραυλο, Α=σημείο στην επιφάνεια της Γης και Β=σημείο σε απόσταση  $2,4 \times 10^7 \text{ m}$  από το κέντρο του πλανήτη, άρα  $r_A = R$ ,  $r_B = r' = 2,4 \times 10^7 \text{ m}$  (1 μονάδα).

Με αντικατάσταση (2 μονάδες):

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= m \left( -\frac{GM}{R} - \left( -\frac{GM}{r'} \right) \right) = (10^3 \text{ kg}) \left( -\frac{3,6 \times 10^{14} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}}}{6 \times 10^6 \text{ m}} - \left( -\frac{3,6 \times 10^{14} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}}}{2,4 \times 10^7 \text{ m}} \right) \right) \\ &= -4,5 \times 10^{10} \text{ J} \end{aligned}$$

Η ενέργεια που πρέπει να δοθεί είναι (1 μονάδα) ακριβώς  $E = -W_{A \rightarrow B} = 4,5 \times 10^{10} J$

**Μονάδες 6**

12.

4.1. Βρίσκουμε τη διαφορά δυναμικού του πυκνωτή:

Η σχέση μεταξύ της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου και της διαφοράς δυναμικού είναι:

$$E = \frac{V}{L} = 2 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$

**Μονάδες 5**

4.2. Από 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα έχουμε:  $F = ma \Rightarrow Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$ .

**Μονάδες 6**

4.3. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε:

$$L = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}, \quad \text{άρα: } v = \alpha t_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

**Μονάδες 7**

4.4. Από τη σχέση της έντασης και της διαφοράς δυναμικού σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο έχουμε:

$$E = \frac{V_K - V_\Lambda}{(K\Lambda)} \Rightarrow V_K - V_\Lambda = E \cdot (K\Lambda) \Rightarrow V_\Lambda = V_K - E \cdot (K\Lambda) = 30 \text{ Volt}$$

**Μονάδες 7**

13.

4.1. Το σωματίδιο στην περιοχή (I) δέχεται δύναμη  $F_1 = E_1 q$ , οπότε εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, συνεπώς:  $F_1 = m\alpha_1 \Rightarrow E_1 q = m\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{E_1 q}{m} = 1 \text{ m/s}^2$ .

**Μονάδες 5**

4.2. Από την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση που εκτελεί το σωματίδιο έχουμε:

$$L = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow L = 2 \text{ m}, \quad v_1 = \alpha_1 t_1 = 2 \text{ m/s}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Το σωματίδιο στην περιοχή (II) δέχεται δύναμη  $F_2 = E_2 q$ , ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση  $\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1-2}{4-2} = -0,5 \text{ m/s}^2$ . Συνεπώς:

$$F_2 = m|\alpha_2| \Rightarrow E_2 q = m|\alpha_2| \Rightarrow E_2 = \frac{m|\alpha_2|}{q} = 0,5 \text{ V/m}$$

$$d = v_1 \Delta t - \frac{1}{2} |\alpha_2| \cdot (\Delta t)^2 = 3 \text{ m}$$

**Μονάδες 8**

4.4. Από ΘΜΚΕ (Ο στο Σ) έχουμε:

$$W_{O \rightarrow \Sigma} = q(V_O - V_\Sigma) \Rightarrow F_1 \cdot L - F_2 \cdot d = q(V_O - V_\Sigma) \Rightarrow E_1 \cdot L - E_2 \cdot d = V_O - V_\Sigma \Rightarrow$$

$$V_\Sigma = V_O - E_1 \cdot L + E_2 \cdot d = 9,5 \text{ V}$$

**Μονάδες 6**

14.

**4.1.** Τη στιγμή που σταματάει η λειτουργία του προωθητικού μηχανισμού, το διαστημικό όχημα έχει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής  $v_\delta$  από το πεδίο βαρύτητας της Γης και από το ύψος που βρίσκεται τότε από την επιφάνειά της. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας για την κίνηση του οχήματος από το σημείο εκείνο μέχρι την έξοδό του από το πεδίο της Γης:

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\delta^2 - \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h} = 0$  και επειδή  $h = R_\Gamma$  και  $G \cdot M_\Gamma = g_0 \cdot R_\Gamma^2$  προκύπτει:

$$v_\delta = \sqrt{g_0 \cdot R_\Gamma} = 8000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

**4.2.** Επειδή το όχημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση, δέχεται σταθερή συνισταμένη δύναμη με τη δράση του προωθητικού μηχανισμού, για την οποία σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής ισχύει:

$F = m \cdot a$ . Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για την κίνηση του οχήματος μέχρι να σταματήσει ο προωθητικός μηχανισμός:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\delta^2 = F \cdot h = m \cdot a \cdot h \quad \text{οπότε} \quad a = \frac{v_\delta^2}{2 \cdot h} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**Μονάδες 6**

**4.3.**  $v_\delta = a \cdot t$  άρα  $t = 1600 \text{ s}$

**Μονάδες 6**

**4.4.** Στη χρονική διάρκεια που ζητήθηκε, δεν έχει ακόμη σταματήσει ο προωθητικός μηχανισμός. Έτσι ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 3,2 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Τότε η δυναμική ενέργεια του οχήματος είναι:

$$U = -G \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h} = -\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2 \cdot m}{R_\Gamma + h} = -1,28 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

**Μονάδες 7**

15.

**4.1.** Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από την είσοδο του μετεωρίτη στο βαρυτικό πεδίο της Γης, μέχρι να χτυπήσει στην επιφάνειά της:

$$E_M^{\alpha\rho\chi} = E_M^{\varepsilon\pi\iota\varphi}, \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma}$$

$$\text{Αλλά ισχύει} \quad G \cdot M_\Gamma = g_0 \cdot R_\Gamma^2$$

$$\text{Οπότε προκύπτει} \quad v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g_0 \cdot R_\Gamma$$

$$\text{Και με αντικατάσταση} \quad v = 16 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

**4.2.** Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από την είσοδο του μετεωρίτη στο βαρυτικό πεδίο της Γης, μέχρι την είσοδό του στην ατμόσφαιρα της Γης:

$$E_M^{\alpha\rho\chi} = E_M^{\alpha\tau\mu}, \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h}$$

$$\text{Αλλά ισχύει} \quad G \cdot M_\Gamma = g_0 \cdot R_\Gamma^2 \quad \text{και} \quad h = \frac{R_\Gamma}{4}$$

Οπότε προκύπτει

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{8}{5} \cdot g_0 \cdot R_\Gamma = \left( 2 \cdot 64 \cdot 10^6 + \frac{8}{5} \cdot 64 \cdot 10^6 \right) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2 \cdot 64 \cdot 10^6 \cdot \frac{9}{5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 4 \cdot 9 \cdot 64 \cdot 10^5 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\text{Και τελικά} \quad v_1 = 4,8 \cdot 10^{3,5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

$$\mathbf{4.3.} \quad U_1 = -G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h} = -\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2 \cdot m}{\frac{5}{4} \cdot R_\Gamma} = -\frac{4}{5} \cdot g_0 \cdot R_\Gamma \cdot m = -5,12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

**Μονάδες 6**

**4.4.** Η θερμική ενέργεια που παράχθηκε είναι ίση με την απώλεια μηχανικής ενέργειας του μετεωρίτη από την είσοδό του στο πεδίο βαρύτητας της Γης, μέχρι να φτάσει στην επιφάνειά της αφού πέρασε μέσα από την ατμόσφαιρα.

$$Q = |\Delta E_M| = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma} \right) = G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma} = g_0 \cdot R_\Gamma \cdot m = 6,4 \cdot 10^9 \text{ J}$$

**Μονάδες 7**

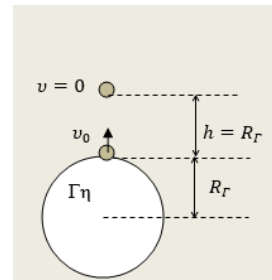


16.

**4.1.** Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από την εκτόξευση μέχρι το σημείο που φτάνει:

$$E_M^{\alpha\rho\chi} = E_M^{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad -G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = -G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{2 \cdot R_\Gamma}$$

$$\text{ή} \quad \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{2 \cdot R_\Gamma}, \text{ οπότε } v_0 = \sqrt{g_0 \cdot R_\Gamma} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



**Μονάδες 6**

**4.2.** Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από το ύψος  $h = R_\Gamma$ , είναι:

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{g_0 \cdot R_\Gamma} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

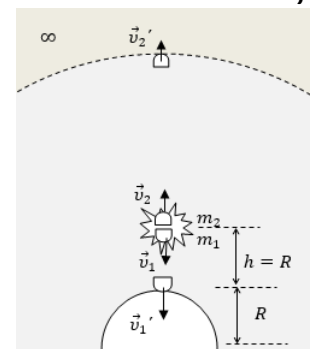
**4.3.** Έστω  $\vec{v}_1$  η ταχύτητα του σώματος μάζας  $m_1$  αμέσως μετά την έκρηξη και  $\vec{v}_1'$  η ταχύτητά του όταν φτάνει στην επιφάνεια της Γης. Το σώμα αυτό αμέσως μετά την έκρηξη κινείται προς τη Γη. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, συνεπώς:

$$E_M^{\varepsilon\kappa\rho} = E_M^{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m_1}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m_1}{R_\Gamma}$$

$$v_1^2 - \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma + h} = v_1'^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma}$$

$$v_1^2 = v_1'^2 - \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma}$$



$$v_1 = \sqrt{v_1'^2 - g_0 \cdot R_\Gamma} = \sqrt{2,56 \cdot 10^8 - 0,64 \cdot 10^8} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{192} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Κατά την έκρηξη που συνέβη στο αρχικό σώμα, με την οποία χωρίστηκε στα δύο νέα σώματα ίσης μάζας και η οποία θεωρείται ασήμαντης χρονικής διάρκειας, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων αυτών:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}, \quad \text{ή} \quad 0 = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2, \quad \text{άρα} \quad \text{ισχύει } m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \text{ και επειδή } m_1 = m_2$$

προκύπτει  $v_2 = v_1 = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} > v_\delta$

Άρα η μάζα  $m_2$  διαφεύγει από την έλξη του πεδίου βαρύτητας της Γης κινούμενη προς το διάστημα.

**Μονάδες 7**

**4.4.** Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η μάζα  $m_2$  διαφεύγει στο διάστημα εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, κατά την κίνησή της από το σημείο της έκρηξης μέχρι τη διαφυγή της από το πεδίο βαρύτητας της Γης:

$$E_M^{\varepsilon\kappa\rho} = E_M^\infty, \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m_2}{2 \cdot R_\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad v_2'^2 = v_2^2 - g_0 \cdot R_\Gamma$$

$$\text{τελικά} \quad v_2' = \sqrt{v_2^2 - g_0 \cdot R_\Gamma} = \sqrt{1,92 \cdot 10^8 - 0,64 \cdot 10^8} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

17.

**4.1.** Για να παραμένει στην δορυφορική του τροχιά γύρω από τον πλανήτη, πρέπει να κινείται με ταχύτητα τέτοια, ώστε η βαρυτική έλξη του από τον πλανήτη, να παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης στην κυκλική του τροχιά στο ύψος αυτό. Δηλαδή πρέπει:

$$F_B = F_K \quad \text{ή} \quad G \cdot \frac{M_{\Pi} \cdot m}{(R_{\Pi} + h)^2} = \frac{m \cdot v_{\delta\sigma\rho}^2}{R_{\Pi} + h}$$

$$\text{ή} \quad G \cdot \frac{M_{\Gamma}}{9 \cdot R_{\Gamma}} = v_{\delta\sigma\rho}^2, \quad \text{οπότε} \quad v_{\delta\sigma\rho} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_{\Gamma}}{9}} = \frac{8}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η περίοδος περιστροφής του οχήματος γύρω από τον πλανήτη υπολογίζεται:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot R_{\Gamma}}{v_{\delta\sigma\rho}} = \frac{18 \cdot \pi \cdot 64 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^3} \text{ s} = 14400 \cdot \pi \text{ s}$$

**Μονάδες 7**

**4.2.** Κατά την εκτόξευση του σώματος από το όχημα, η οποία θεωρείται ασήμαντης χρονικής διάρκειας ισχύει η αρχή διατήρησης ορμής, με αποτέλεσμα το υπόλοιπο όχημα να κινείται στην ίδια διεύθυνση με την ταχύτητά του ακριβώς πριν την εκτόξευση. Δηλαδή:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}, \quad \text{ή} \quad m \cdot v_{\delta\sigma\rho} = \frac{2}{3} \cdot m \cdot v'$$

$$\text{Άρα} \quad v' = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

**4.3.** Από την έκρηξη κατά την εκτόξευση του σώματος από το δορυφορικό όχημα, αποδόθηκε στο σύστημα πρόσθετη μηχανική ενέργεια, ως αύξηση της συνολικής κινητικής ενέργειας των τμημάτων του:

$$\Delta E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot m \cdot v'^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\delta\sigma\rho}^2 = \frac{900}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 16 - \frac{64}{9} \right) \cdot 10^6 \text{ J} = \frac{900 \cdot 32}{6} \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$\text{Τελικά} \quad \Delta E_M = 1,6 \cdot 10^9 \text{ J}$$

**Μονάδες 6**

**4.4.** Για την κίνηση του σώματος προς την επιφάνεια του πλανήτη εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$-G \cdot \frac{M_{\Pi} \cdot m_1}{3 \cdot R_{\Pi}} = -G \cdot \frac{M_{\Pi} \cdot m_1}{R_{\Pi}} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{2 \cdot G \cdot M_{\Pi}}{3 \cdot R_{\Pi}} = \frac{v_1^2}{2}, \quad \text{άρα} \quad v_1 = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot g_0 \cdot R_{\Gamma}} = \frac{16}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Μονάδες 6**

18.

4.1. Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} \quad (1)$$

(Μονάδα 1)

Η ένταση του Βαρυτικού Πεδίου στην επιφάνεια της Γης είναι ίση με:

$$g_o = G \cdot \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2}, \quad g_o \cdot R_{\Gamma}^2 = G \cdot M_{\Gamma} \quad (2)$$

(Μονάδα 1)

Αντικαθιστούμε στην (1) τη (2) και έχουμε:

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma}}}, \quad v_{\delta} = \sqrt{2 \cdot g_o \cdot R_{\Gamma}} \quad (3)$$

Συνεπώς, με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει:

$$v_{\delta} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 m}, \quad v_{\delta} = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

4.2. Το δυναμικό στην επιφάνεια της Γης είναι ίσο με:

$$V_o = - G \cdot \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}},$$

(Μονάδα 1)

$$V_o = - \frac{g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma}}, \quad V_o = - g_o \cdot R_{\Gamma}, \quad V_o = - 6,4 \cdot 10^7 \frac{J}{Kg}$$

(Μονάδες 2)

Το δυναμικό στο σημείο Α στο ύψος  $h = R_{\Gamma}$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_A = - G \cdot \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h},$$

(Μονάδα 1)

$$V_A = - \frac{g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + R_{\Gamma}}, \quad V_A = - \frac{g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{2 \cdot R_{\Gamma}}, \quad V_A = - \frac{g_o \cdot R_{\Gamma}}{2}, \quad V_A = - 3,2 \cdot 10^7 \frac{J}{Kg}$$

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

4.3. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος  $h$

$$K_A - K_o = W$$

(Μονάδα 1)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = m \cdot (V_o - V_A),$$

(Μονάδα 1)

$$\frac{1}{2} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot v_1^2 = (V_o - V_A), v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot (V_o - V_A),$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2 \cdot (V_o - V_A), v_2^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot v_\delta\right)^2 + 2 \cdot (V_o - V_A), v_2^2 = \frac{9}{16} \cdot v_\delta^2 + 2 \cdot (V_o - V_A)$$

Και με αντικατάσταση προκύπτει:  $v_2 = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot 128 \cdot 10^6 + 2 \cdot (-3,2 \cdot 10^7)} \frac{m}{s},$   
 $v_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s}$

(Μονάδες 4)

#### Μονάδες 6

**4.4.** Εφόσον το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό, η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων (Γη και σώμα) διατηρείται. Επομένως κατά την κίνηση του σώματος μεταξύ δύο θέσεων θα ισχύει

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

(Μονάδα 1)

Στο μέγιστο ύψος  $h_{max}$  θα είναι  $K_2 = 0$ , συνεπώς:

(Μονάδα 1)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \left(-G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma}\right) = 0 + \left(-G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma + h_{max}}\right)$$

(Μονάδα 1)

Όμως,  $g_o \cdot R_\Gamma^2 = G \cdot M_\Gamma$  και με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}}, \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \cdot v_\delta^2 - \frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \cdot 2 \cdot g_o \cdot R_\Gamma - g_o \cdot R_\Gamma = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}},$$

$$\frac{9}{16} \cdot g_o \cdot R_\Gamma - g_o \cdot R_\Gamma = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}}, -\frac{7}{16} \cdot g_o \cdot R_\Gamma = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}},$$

$$\frac{7}{16} \cdot g_o = \frac{g_o \cdot R_\Gamma}{R_\Gamma + h_{max}} \rightarrow$$

$$h_{max} = \frac{9 \cdot R_\Gamma}{7}$$

(Μονάδες 3)

Και με αντικατάσταση:

$$h_{max} \cong 8,23 \cdot 10^6 \text{ m}$$

(Μονάδα 1)

#### Μονάδες 7

## 19.

**4.1.** Μεταξύ των σφαιριδίων ασκούνται απωστικές δυνάμεις.

(Μονάδα 1)

Το σφαιρίδιο 1 επιβραδύνεται ενώ το σφαιρίδιο 2 επιταχύνεται.

(Μονάδα 1)

Καθώς το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου 1 ελαττώνεται και του σφαιριδίου 2 αυξάνεται η μεταξύ τους απόσταση μικραίνει.

Κάποια στιγμή τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων θα γίνουν ίσα και στη συνέχεια η ταχύτητα του 1 θα γίνει μικρότερη από την ταχύτητα του 2 και η απόστασή τους θα μεγαλώνει.

Συνεπώς, τα δύο σφαιρίδια θα βρεθούν στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση όταν οι ταχύτητές τους θα εξισωθούν.

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 5**

**4.2.** Στην ελάχιστη απόσταση τα σφαιρίδια έχουν ίσες ταχύτητες. Άρα  $v_1 = v_2 = v$ .

(Μονάδα 1)

Το σύστημα είναι μονωμένο, επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, συνεπώς η ορμή του συστήματος διατηρείται.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}, \quad m_1 \cdot \vec{v}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

(Μονάδες 2)

$$m_1 \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2,$$

(Μονάδα 1)

$$m_1 \cdot v_0 = m_1 \cdot v + 3 \cdot m_1 \cdot v, \quad m_1 \cdot v_0 = 4 \cdot m_1 \cdot v, \quad v_0 = 4 \cdot v, \quad v = \frac{v_0}{4} = 10 \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

**4.3.** Η μεταβολή της ορμής δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}$$

Για τη μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου 1 είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1,\tau\epsilon\lambda} - \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi}$$

$$\Delta p_1 = p_{1,\tau\epsilon\lambda} - p_{1,\alpha\rho\chi}, \quad \Delta p_1 = m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_0, \quad \Delta p_1 = m_1 \cdot (v - v_0),$$

$$\Delta p_1 = -3 \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 3)

Για τη μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου 2 είναι:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2,\tau\epsilon\lambda} - \vec{p}_{2,\alpha\rho\chi}$$

$$\Delta p_2 = p_{2,\tau\epsilon\lambda} - 0, \quad \Delta p_2 = m_2 \cdot v_2, \quad \Delta p_2 = m_2 \cdot v, \quad \Delta p_2 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**4.4.** Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται γιατί η μοναδική αλληλεπίδρασή τους είναι η ηλεκτρική αλληλεπίδραση, που είναι συντηρητική.

Αν θεωρήσουμε ως αρχική θέση τη θέση από την οποία βάλλεται το σφαιρίδιο 1 και ως τελική τη θέση που τα σφαιρίδια βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση, τότε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

(Μονάδα 1)

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2 + K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{L_{min}},$$

(Μονάδες 4)

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2 + K_c \cdot \frac{q_1^2}{d} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m_1 \cdot v^2 + K_c \cdot \frac{q_1^2}{L_{min}},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 10^{-9} \cdot 40^2 + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(10^{-8})^2}{1} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot 10^{-9} \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(10^{-8})^2}{L_{min}} \quad (S.I.), \end{aligned}$$

$$L_{min} = \frac{9}{15} m = 0,6 m$$

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 8**

20.

**4.1.** Το μέτρο της έντασης στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με το πηλίκο της διαφοράς δυναμικού δύο οποιωνδήποτε σημείων του ηλεκτρικού πεδίου προς την απόστασή τους  $x$ , μετρημένη κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής.

$$E = \frac{V}{L}$$

(Μονάδα 1)

$$E = \frac{V}{d}, E = \frac{1 \text{ KV}}{5 \text{ mm}}, E = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ V}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \rightarrow$$

(Μονάδες 2)

$$E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

ή

$$E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

(Μονάδα 1)

**Μονάδες 4**

**4.2.** Αν σε ένα ομογενές πεδίο βρεθεί ένα φορτισμένο σωματίδιο τότε θα δεχτεί σταθερή δύναμη μέτρου

$$F = E \cdot |q|$$

(Μονάδα 1)

και θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση μέτρου

$$a = \frac{E \cdot |q|}{m}$$

Για το φορτίο  $q_1$  είναι:

$$a_1 = \frac{E \cdot |q_1|}{m_1}$$

Για το φορτίο  $q_2$  είναι:

$$a_2 = \frac{E \cdot |q_2|}{m_2}$$

(Μονάδες 3)

Συνεπώς, ο λόγος των μέτρων των επιταχύνσεων είναι:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{E \cdot |q_1|}{m_1}}{\frac{E \cdot |q_2|}{m_2}}, \frac{a_1}{a_2} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \cdot \frac{m_2}{m_1}, \frac{a_1}{a_2} = 1 \cdot \frac{m_2}{2 \cdot m_2}, \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

4.3. Για το φορτίο  $q_1$  είναι:

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \frac{N}{C} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} Kg}, \alpha_1 \cong 0,18 \cdot 10^{17} \frac{N}{Kg} = 1,8 \cdot 10^{16} \frac{m}{s^2}$$

(Μονάδες 2)

Το έργο για τη μετακίνηση του φορτίου από το σημείο Α στο Β προσδιορίζεται μέσω της σχέσης:

$$W_{AB} = q_1 \cdot V,$$

(Μονάδα 1)

$$W_{AB} = e \cdot 10^3 V, W_{AB} = 1000 eV$$

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 5**

4.4. Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της θέσης συναρτήσει του τετραγώνου του χρόνου θα προσδιορίσουμε το χρόνο άφιξης του φορτίου στο σημείο Β και μάλιστα το τετράγωνο του χρόνου αυτού. Τα σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, συνεπώς είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ και για } x_0 = 0 \text{ είναι } x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

(Μονάδα 1)

Θα λύσουμε την τελευταία εξίσωση ως προς το χρόνο στο τετράγωνο:

$$t^2 = \frac{2 \cdot x}{a}$$

(Μονάδα 1)

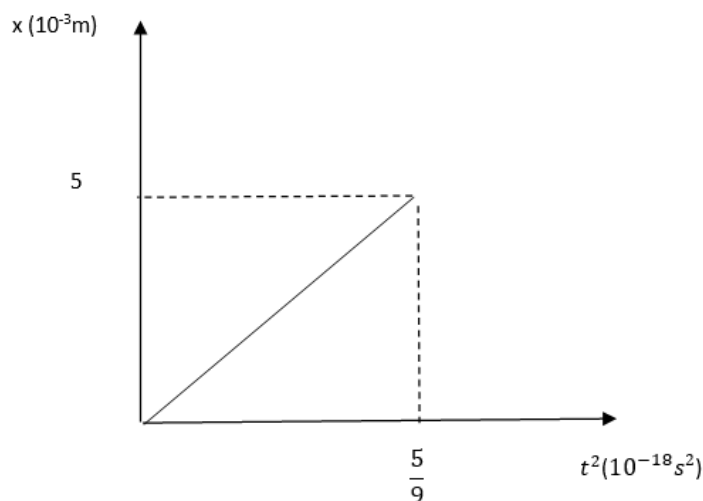
Για το χρόνο κίνησης του φορτίου  $q_1$  είναι:

$$t_1^2 = \frac{2 \cdot d}{a_1}, t_1^2 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} m}{1,8 \cdot 10^{16} \frac{m}{s^2}}, t_1^2 = \frac{5}{9} \cdot 10^{-18} s^2$$

(Μονάδα 1)

Η γραφική παράσταση της θέσης συναρτήσει του τετραγώνου του χρόνου θα είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων γιατί η σχέση  $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$  ή  $x = \frac{a}{2} \cdot t^2$  είναι της μαθηματικής μορφής  $y = \alpha \cdot x$ .

(Μονάδα 1)



(Μονάδες 4)





21.

4.1. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων δίνεται από τη σχέση:

$$U_{o\lambda} = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3}$$

(Μονάδα 1)

$$U_{o\lambda} = K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\alpha} + K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{\alpha} + K_c \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{\alpha},$$

$$U_{o\lambda} = K_c \cdot \frac{q^2}{\alpha} + K_c \cdot \frac{q^2}{\alpha} + K_c \cdot \frac{q^2}{\alpha},$$

$$U_{o\lambda} = 3 \cdot K_c \cdot \frac{q^2}{L},$$

(Μονάδες 2)

$$U_{o\lambda} = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-6} C)^2}{0,3 \cdot 10^{-2} m},$$

$$U_{o\lambda} = 36J$$

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 5**

4.2. Αρχικά η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων είναι

$$U_{\alpha\rho\chi} = K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{L}$$

Και η τελική δυναμική ενέργεια είναι ίση με:

$$U_{\tau\epsilon\lambda} = K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{2L}$$

(Μονάδες 2)

Συνεπώς, ο λόγος  $\frac{U_{\alpha\rho\chi}}{U_{\tau\epsilon\lambda}}$  θα ισούται με

$$\frac{U_{\alpha\rho\chi}}{U_{\tau\epsilon\lambda}} = \frac{K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{L}}{K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{2 \cdot L}}, \frac{U_{\alpha\rho\chi}}{U_{\tau\epsilon\lambda}} = 2$$

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 5**

4.3. Το σύστημα είναι μονωμένο, συνεπώς η ορμή διατηρείται.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}, \vec{0} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$0 = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2,$$

(Μονάδες 3)

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2, m_1 \cdot v_1 = 2 \cdot m_1 \cdot v_2, v_1 = 2 \cdot v_2, \frac{v_1}{v_2} = 2$$

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

**4.4.** Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων διατηρείται.

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda}$$

$$0 + K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{L} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{2 \cdot L},$$

(Μονάδες 4)

$$K_c \cdot \frac{q^2}{L} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (2 \cdot v_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_1 \cdot v_2^2 + K_c \cdot \frac{q^2}{2 \cdot L},$$

$$K_c \cdot \frac{q^2}{L} - K_c \cdot \frac{q^2}{2 \cdot L} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 4 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_1 \cdot v_2^2,$$

$$K_c \cdot \frac{q^2}{2 \cdot L} = \frac{6}{2} \cdot m_1 \cdot v_2^2,$$

$$K_c \cdot \frac{q^2}{L} = 6 \cdot m_1 \cdot v_2^2, v_2^2 = K_c \cdot \frac{q^2}{6 \cdot m_1 \cdot L}, v_2 = \sqrt{\frac{q^2 \cdot K_c}{6 \cdot m_1 \cdot L}}, v_2 = q \cdot \sqrt{\frac{K_c}{6 \cdot m_1 \cdot L}}$$

Και με αριθμητική αντικατάσταση:

$$v_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{6 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}}},$$

$$v_2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Μονάδες 3)

Άρα

$$v_1 = 2 \cdot v_2, v_1 = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Μονάδα 1)

**Μονάδες 8**

22.

**4.1.** Η βαρυτική δύναμη που δέχεται ένας τεχνητός δορυφόρος που κινείται γύρω από τη Γη δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

$$\text{Σχέση βαρυτικής δύναμης: } w = G \cdot \frac{m \cdot M_{\Gamma}}{r^2}$$

$$\text{Σχέση κεντρομόλου δύναμης: } F_{\kappa} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\text{Είναι: } F_{\kappa} = w, \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M_{\Gamma}}{r^2}, v^2 = G \cdot \frac{M_{\Gamma}}{r}, v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\Gamma}}{r}} \quad (1)$$

(Μονάδες 3)

$$\text{Για τον δορυφόρο ύψος } h \text{ είναι: } r = R_{\Gamma} + h, r = R_{\Gamma} + R_{\Gamma}, r = 2 \cdot R_{\Gamma} \quad (2)$$

Επιπλέον, το μέτρο της έντασης του Βαρυτικού Πεδίου στην επιφάνεια της Γης είναι ίσο με:

$$g_o = G \cdot \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2}, g_o \cdot R_{\Gamma}^2 = G \cdot M_{\Gamma} \quad (3)$$

(Μονάδα 1)

Άρα, αν αντικαταστήσουμε στην (1) τις (2) και (3) προκύπτει:

$$v = \sqrt{\frac{g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{2 \cdot R_{\Gamma}}}, v = \sqrt{\frac{g_o \cdot R_{\Gamma}}{2}}$$

(Μονάδα 1)

**Μονάδες 5**

**4.2.** Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα που προσδιορίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα δεν εξαρτάται από τη μάζα του αντικειμένου, συνεπώς, το κομμάτι μάζας  $m_1$  που παραμένει σε τροχιά θα συνεχίσει να κινείται εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα ίσου μέτρου.

(Μονάδα 1)

Η περίοδος, δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

(Μονάδα 1)

Συνεπώς,

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot R_{\Gamma}}{\sqrt{\frac{g_o \cdot R_{\Gamma}}{2}}}, T = 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot R_{\Gamma}}{g_o}}$$

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 5**

**4.3.** Εάν το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται σε ύψος  $h$  από την επιφάνεια της Γης προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής δίνεται από τη σχέση

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}$$

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}, v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + R_{\Gamma}}}, v_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot g_o \cdot R_{\Gamma}^2}{2 \cdot R_{\Gamma}}}, v_{\delta} = \sqrt{g_o \cdot R_{\Gamma}}$$

(Μονάδες 5)

Συνεπώς ο λόγος  $\frac{v_{\delta}}{v}$  είναι ίσος με:

$$\frac{v_{\delta}}{v} = \frac{\sqrt{g_o \cdot R_{\Gamma}}}{\sqrt{\frac{g_o \cdot R_{\Gamma}}{2}}}, \frac{v_{\delta}}{v} = \sqrt{2}$$

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 7**

**4.4.** Κατά την έκρηξη η ορμή του συστήματος διατηρείται.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}$$

(Μονάδα 1)

$$m \cdot v = -m_1 \cdot v + m_2 \cdot v_{\delta}$$

(Μονάδες 2)

$$(m_1 + m_2) \cdot v = -m_1 \cdot v + m_2 \cdot v_{\delta},$$

$$m_1 \cdot v + m_2 \cdot v = -m_1 \cdot v + m_2 \cdot v_{\delta},$$

$$m_1 \cdot v + m_1 \cdot v = m_2 \cdot v_{\delta} - m_1 \cdot v, 2 \cdot m_1 \cdot v = m_2 \cdot (v_{\delta} - v),$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(v_{\delta} - v)}{2 \cdot v}, \frac{m_1}{m_2} = \frac{(\sqrt{2} \cdot v - v)}{2 \cdot v}, \frac{m_1}{m_2} = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

(Μονάδες 5)

**Μονάδες 8**

23.

4.1. Αφού η σταγόνα ισορροπεί θα έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή} \quad F_{\eta\lambda} = |q|E = mg \quad \text{ή} \quad E = \frac{mg}{|q|} = 10^4 \frac{V}{m}$$

**Μονάδες 6**

4.2. Αν διπλασιάσουμε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της πηγής, διατηρώντας σταθερή την απόσταση των πλακών θα διπλασιαστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E' = \frac{V'}{d} \quad \text{ή} \quad E' = \frac{2V}{d} \quad \text{ή} \quad E' = 2E$$

Συνεπώς θα διπλασιαστεί η ηλεκτρική δύναμη και η σταγόνα δε θα ισορροπεί πλέον. Η αρχική τιμή της δύναμης είναι  $F_{\eta\lambda}$  και η νέα τιμή της δύναμης θα είναι  $F_{\eta\lambda}'$  οπότε θα έχουμε (χρησιμοποιώντας  $E' = 2E$ ):

$$F_{\eta\lambda} = mg \quad \text{και}$$

$$F_{\eta\lambda}' = qE' = 2qE = 2mg$$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η σταγόνα θα είναι:  $\Sigma F = F_{\eta\lambda}' - mg$

Άρα:  $\Sigma F = 2mg - mg = mg$ , συνεπώς η σταγόνα θα κινηθεί προς τα πάνω.

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton:

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad mg = ma$$

$$a = g = 10 \frac{m}{s^2}$$

Ανέρχεται προς τα πάνω με επιτάχυνση με μέτρο ίσο με  $10 \frac{m}{s^2}$ .

**Μονάδες 6**

4.3. Η σταγόνα κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, συνεπώς για τον χρόνο κίνησης του ηλεκτρικού φορτίου θα έχουμε:

$$t = \frac{v}{a} = 0,1s \quad ,$$

Και για την απόσταση που διανύει η σταγόνα:  $\frac{d}{2} = \frac{1}{2}at^2$

$$d = at^2 = 0,1m$$

**Μονάδες 6**

4.4. Υπολογίζουμε το έργο του βάρους  $w$  καθώς και το έργο της δύναμης  $F_{\eta\lambda}'$  από τις παρακάτω σχέσεις:

$$W_w = -mg \frac{d}{2} = -10^{-4}J$$

$$W_{F'} = qE' \frac{d}{2} = 2mg \frac{d}{2} = 2 \cdot 10^{-4}J$$

**Μονάδες 7**

24.

4.1. Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης σε ύψος  $h$  από την επιφάνειά της δίνεται από την σχέση

$$g = \frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$$

Αντικαθιστώντας το ύψος  $h = 3R_\Gamma$  και το γεγονός ότι  $GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2$  θα έχουμε

$$g = \frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{16R_\Gamma^2} = \frac{g_0}{16} = 0,624 \frac{m}{s^2}$$

**Μονάδες 5**

4.2. Η ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου θα είναι

$$u = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}} = \frac{\sqrt{g_0 R_\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{10 \frac{m}{s^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 m}}{2} = 4 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Σε χρονικό διάστημα μισής περιόδου, ο δορυφόρος αντιστρέφει την φορά της ταχύτητάς του χωρίς να αλλάζει το μέτρο, οπότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του θα είναι:

$$\Delta P = P_{τελ} - P_{αρχ} = mu - (-mu) = 2mu = 2 \cdot 5 \cdot 10^3 kg \cdot 4 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 4 \cdot 10^7 \frac{kgm}{s}$$

**Μονάδες 6**

4.4. Για να αποδείξουμε ότι ο δορυφόρος διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης θα συγκρίνουμε την ταχύτητα διαφυγής σε αυτό το ύψος με την ταχύτητα που απέκτησε ο δορυφόρος. Έχουμε

$$u_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}} = \frac{\sqrt{2g_0 R_\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 m}}{2} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s} < 2u = 8 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα που απέκτησε από τους πυραύλους είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διαφυγής στο σημείο αυτό, οπότε θα μεταβεί σε "άπειρη" απόσταση. Για να υπολογίσουμε την τελική ταχύτητα του δορυφόρου θα εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε. από την αρχική θέση μέχρι την τελική ( $U_{τελ} = 0$ ).

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Leftrightarrow -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma + h} + \frac{mu_1^2}{2} = \frac{mu_\infty^2}{2} \Leftrightarrow \frac{u_\infty^2}{2} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} + \frac{u_1^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$u_\infty = \sqrt{\frac{2u_1^2 - g_0 R_\Gamma}{2}} = \sqrt{\frac{128 \cdot 10^6 - 64 \cdot 10^6}{2}} \frac{m}{s} = \sqrt{32 \cdot 10^6} \frac{m}{s} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

**Μονάδες 8**

25.

4.1. Για να υπολογίσουμε την μάζα  $m_2$  θα εφαρμόσουμε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης για τις δύο μάζες.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{Fd^2}{Gm_1} = \frac{\frac{40}{3} 10^{-11} \cdot 1^2}{\frac{20}{3} 10^{-11} \cdot 2} kg = 1kg$$

**Μονάδες 6**

4.2. Το δυναμικό στο σημείο M, το οποίο είναι το μέσο της απόστασης των σημείων οφείλεται στην συνεισφορά των δύο μαζών, συνεπώς

$$V^{(M)} = V_1^{(M)} + V_2^{(M)} = -\frac{Gm_1}{\frac{d}{2}} - \frac{Gm_2}{\frac{d}{2}} = -\frac{2G(m_1 + m_2)}{d} = -2\frac{20}{3} 10^{-11} \cdot 3 \frac{J}{kg} = -4 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των 3 μαζών θα είναι

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{d} - \frac{Gm_1m_3}{\frac{d}{2}} - \frac{Gm_2m_3}{\frac{d}{2}} = -\frac{G}{d}(m_1m_2 + 2m_1m_3 + 2m_2m_3) \Leftrightarrow$$

$$U = -\frac{20}{3} 10^{-11} \cdot (2 + 2 + 1)J = -\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}J$$

Το έργο της βαρυτικής δύναμης για την μεταφορά της  $m_3$  από το σημείο M στο “άπειρο” είναι

$$W_{M \rightarrow \infty} = mV_M = 0,5kg \left( -4 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg} \right) = -2 \cdot 10^{-10}J$$

**Μονάδες 7**

4.4. Όταν αφεθούν ελεύθερες οι μάζες να κινηθούν, το σύστημα που δημιουργούν είναι μονωμένο και ισχύει η διατήρηση της ορμής σε όλη την διάρκεια της κίνησής τους. Συνεπώς

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow 0 = m_1u_1 - m_2u_2 \Leftrightarrow m_1u_1 = m_2u_2 \Leftrightarrow 2u_1 = u_2 \Leftrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{2}$$

**Μονάδες 6**



26.

4.1. Η ένταση στο σημείο Σ της τροχιάς του δορυφόρου είναι :

$$g_{\Sigma} = G \frac{M_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + h)^2} = \frac{g_0 \cdot R_{\Gamma}^2}{(R_{\Gamma} + h)^2} = \frac{10 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{(9 \cdot 10^6)^2} = \frac{409,6}{81} = 5,06 \text{ m/s}^2$$

με διεύθυνση, την διεύθυνση της ακτίνας και φορά προς το κέντρο της Γης.

Για το δυναμικό ισχύει:

$$V_{\Sigma} = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} = -\frac{g_0 \cdot R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h} = -\frac{10 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^6} = -45,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

**Μονάδες 6**

4.2. Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα δυναμικής και κινητικής ενέργειας στο ύψος αυτό.

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U_{\Sigma} = -G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h}$$

Για την κινητική ενέργεια:

Από την κυκλική κίνηση είναι  $\Sigma F = F_k \Leftrightarrow F_g = F_k$

$$G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{(R_{\Gamma} + h)^2} = \frac{m_{\Sigma} u^2}{R_{\Gamma} + h} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h} = m_{\Sigma} u^2$$

$$\frac{1}{2} G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h} = \frac{1}{2} m_{\Sigma} u^2 = K_{\Sigma}$$

$$E_M = U_{\Sigma} + K_{\Sigma} = -G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h} + \frac{1}{2} G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h} = -\frac{1}{2} G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h}$$

$$E_M = -\frac{1}{2} 45,5 \cdot 10^6 \cdot 450 = -1,02 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Στην νέα τροχιά ο δορυφόρος θα έχει το 80% της αρχικής μηχανικής ενέργειας:

$$E'_M = 0,8 E_M$$

$$-\frac{1}{2} G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h} = 0,8 \left( -\frac{1}{2} G \frac{M_{\Gamma} \cdot m_{\Sigma}}{R_{\Gamma} + h'} \right)$$

$$\frac{1}{R_{\Gamma} + h} = \frac{0,8}{R_{\Gamma} + h'} \Leftrightarrow R_{\Gamma} + h' = 0,8(R_{\Gamma} + h) \Leftrightarrow h' = 800 \text{ km}$$

**Μονάδες 6**

4.4. Οι ταχύτητες του δορυφόρου στις δύο τροχιές είναι:

$$u = \sqrt{G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}$$

$$u' = \sqrt{G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h'}}$$

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας:

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow K - K' = W_w + W_F$$

$$\frac{1}{2} G \frac{M_\Gamma \cdot m_\Sigma}{R_\Gamma + h} - \frac{1}{2} G \frac{M_\Gamma \cdot m_\Sigma}{R_\Gamma + h'} = m_\Sigma (V' - V) + W_F$$

$$1,02 \cdot 10^{10} - 0,8 \cdot 10^{10} = 450(-56,9 \cdot 10^6 + 45,5 \cdot 10^6) + W_F$$

$$W_F = 0,22 \cdot 10^{10} + 11,4 \cdot 10^6 = 2,2114 \cdot 10^9 \text{ J}$$

όπου:

$$V' = -G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h'} = -\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h'} = -\frac{10 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{7,2 \cdot 10^6} = -56,9 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

**Μονάδες 7**

27.

4.1. Η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της Σελήνης, δίνεται:

$$g_{\Sigma} = G \frac{M_{\Sigma}}{R_{\Sigma}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}{(1750 \cdot 10^3)^2} = 1,6 \text{ m/s}^2$$

**Μονάδες 5**

4.2. Η δύναμη που ασκεί η σεληνάκατος στην Σελήνη προκύπτει από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης:

$$F = G \frac{M_{\Sigma} \cdot m_{\Delta}}{(R_{\Sigma} + h)^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22} \cdot 5000}{(3 \cdot 10^6)^2} = 2742 \text{ N}$$

Η δυναμική ενέργεια της σεληνακάτου όταν βρίσκεται σε ύψος  $h$  είναι:

$$U = -G \frac{M_{\Sigma} \cdot m_{\Delta}}{R_{\Sigma} + h} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22} \cdot 5000}{3 \cdot 10^6} = -82,2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Το εξάρτημα αποκολλάται σε ύψος  $h=120\text{m}$  και ενώ η σεληνάκατος κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα  $u=10\text{m/s}$ . Άρα και αυτό έχει εκείνη τη στιγμή την ίδια ταχύτητα. Λόγω της έλλειψης ατμόσφαιρας και άρα τριβών, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία φθάνει στην επιφάνεια με την βοήθεια του Θ.Ε.Ε.:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \Sigma W \Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_W \\ \frac{1}{2} m_{\Delta} u_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} m_{\Delta} u_{\alpha\rho\chi}^2 &= m_{\Delta} \cdot g_{\Sigma} \cdot h \Leftrightarrow u_{\tau\epsilon\lambda}^2 = 2gh - u_{\alpha\rho\chi}^2 \\ u_{\tau\epsilon\lambda} &= \sqrt{2g_{\Sigma}h + u_{\alpha\rho\chi}^2} = \sqrt{484} = 22 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Μονάδες 7**

4.4. Μετά την αποκόλληση, η μεν σεληνάκατος συνεχίζει να κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα  $u=10\text{m/s}$  ενώ το εξάρτημα επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση  $g_{\Sigma}$  από την αρχική ταχύτητα  $u$ . Η επιτάχυνση  $g_{\Sigma}$  θεωρείται σταθερή λόγω του μικρού ύψους από το οποίο έγινε η αποκόλληση.

Άρα το εξάρτημα θα φθάσει γρηγορότερα στην επιφάνεια της Σελήνης.

Ο χρόνος για να διανύσει τα  $120\text{m}$  η σεληνάκατος είναι :

$$t_{\sigma\epsilon\lambda\eta\nu} = \frac{h}{u} = \frac{120}{10} = 12 \text{ s}$$

Αντίστοιχα, για το εξάρτημα που εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, είναι:

$$\begin{aligned} u_{\tau\epsilon\lambda} &= u + g_{\Sigma}t \\ h &= u \cdot t + \frac{1}{2} g_{\Sigma}t^2 \end{aligned}$$

Με δεδομένο τον υπολογισμό της ταχύτητας από το προηγούμενο ερώτημα:

$$u_{\tau\epsilon\lambda} = u + g_{\Sigma}t_{\epsilon\chi\alpha\rho\tau} \Leftrightarrow 22 = 10 + 1,6 \cdot t \Leftrightarrow t_{\epsilon\chi\alpha\rho\tau} = 7,5 \text{ s}$$

Οπότε η ζητούμενη χρονική διαφορά θα είναι

$$\Delta t = t_{\sigma\epsilon\lambda\eta\nu} - t_{\epsilon\chi\alpha\rho\tau} = 4,5 \text{ s}$$

**Μονάδες 7**

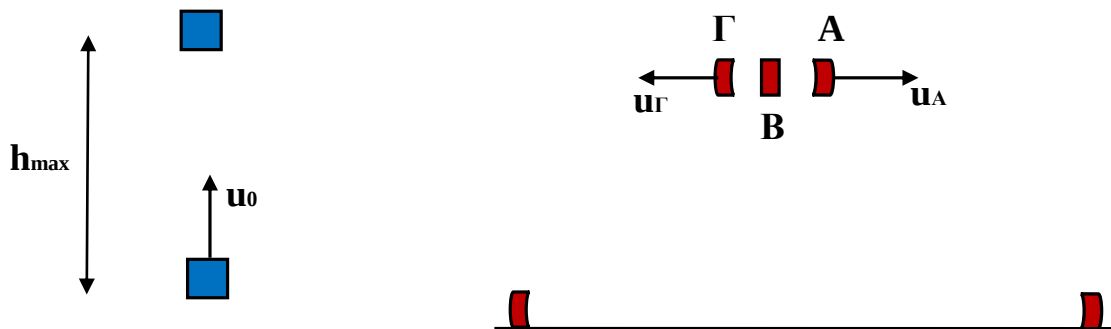
28.

4.1. Λόγω των παραδοχών δεν υπάρχουν τριβές, οπότε εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας με επίπεδο αναφοράς το επίπεδο εκτόξευσης του πυραύλου και μέχρι του μέγιστου ύψους όπου στιγμιαία ακινητεί:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mu_0^2 + 0 = 0 + mgh \Leftrightarrow h = \frac{u_0^2}{2g} = 500m$$

**Μονάδες 5**

4.2. Στο ανώτερο σημείο όπου η ταχύτητα μηδενίζεται, ο πύραυλος εκρήγνυται. Διατηρείται η ορμή του συστήματος κατά την έκρηξη, οπότε:



$$\vec{P}_{\pi\rho\nu} = \vec{P}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{P}_\Gamma \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{P}_A + \vec{0} + \vec{P}_\Gamma$$

Θέτοντας θετική φορά προς τα δεξιά:

$$0 = m_A u_A + m_\Gamma u_\Gamma \Leftrightarrow -\frac{1200}{3}30 = \left(1200 - 500 - \frac{1200}{3}\right)u_\Gamma \Leftrightarrow u_\Gamma = -40m/s$$

Άρα το κομμάτι Γ θα κινηθεί προς τα αριστερά με ταχύτητα 40 m/s.

**Μονάδες 5**

4.3. Το κομμάτι Α του πυραύλου εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα  $u_A=30m/s$ .

Στον άξονα των  $xx'$  εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με χρονική διάρκεια ίδια με εκείνη στον  $yy'$ :

$$yy': h_{max} = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = 10s$$

$$xx': x = u_A t = 30 \cdot 10 = 300m$$

Άρα το σώμα θα συναντήσει το έδαφος στο σημείο (300, -500) ως προς το σημείο της έκρηξης.

**Μονάδες 7**

4.4. Τα δύο κομμάτια του πυραύλου εκτελούν επίσης οριζόντιες βολές. Σε χρόνο 3s θα έχουν πέσει κατά τον ίδιο ύψος  $h_1$ :

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$$

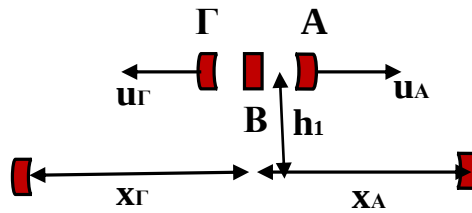
Η μεταξύ τους απόσταση καθορίζεται μόνο από την κίνηση στον άξονα των  $xx'$ .

Οπότε για το κομμάτι Α του πυραύλου:

$$x_A = u_A t_1 = 30 \times 3 = 90m$$

Αντίστοιχα, για το κομμάτι Γ του πυραύλου:

$$x_\Gamma = u_\Gamma t_1 = -40 \times 3 = -120m$$



Άρα, η μεταξύ τους απόσταση θα είναι :  $\Delta x = x_A - x_\Gamma = 90 - (-120) = 210m$

**Μονάδες 8**

29.

4.1. Με βάση την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της έχουμε:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Rightarrow G \cdot M_\Gamma = g_0 \cdot R_\Gamma^2$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ύψος  $h_1$  από την επιφάνεια της Γης είναι:

$$V_1 = -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1} = -\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_1} = -16 \cdot 10^6 \text{ J/Kg}$$

**Μονάδες 6**

4.2. Εφόσον το όχημα δέχεται μόνο τη δύναμη της βαρύτητας, αυτή η δύναμη θα είναι και κεντρομόλος δύναμη ώστε να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση, οπότε:

$$F_g = F_K \Rightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_1}} = 4 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (\text{μονάδες 4})$$

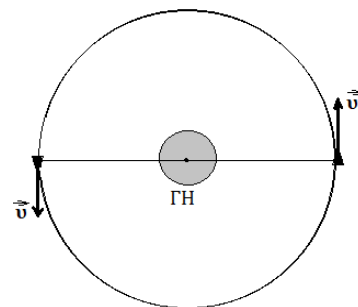
Άρα η περίοδος περιστροφής του δορυφόρου γύρω από τη Γη σε ύψος  $h_1$  από την επιφάνεια της Γης είναι:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_\Gamma + h_1)}{v} = 12800\pi \text{ s} \quad (\text{μονάδες 3})$$

**Μονάδες 7**

4.3. Σε χρονικό διάστημα  $\Delta t = T/2$ , ο δορυφόρος έχει περιστραφεί κατά ένα ημικύκλιο (όπως φαίνεται στο σχήμα), συνεπώς:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} = mv - (-mv) = 2mv = 16 \cdot 10^6 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$$



**Μονάδες 6**

4.4. Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης των δύο σωμάτων έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv + (-m_1 v_1) = (m + m_1)V \Rightarrow V = \frac{mv - m_1 v_1}{m + m_1} \Rightarrow V = -4 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (\text{μονάδες 3})$$

Το συσσωμάτωμα θα παραμείνει σε τροχιά σε ύψος  $h_1$  από την επιφάνεια της Γης γιατί όπως βλέπουμε από τη σχέση  $v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}}$ , που αποδείξαμε προηγουμένως, η ταχύτητα ενός δορυφόρου εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο της Γης. Συνεπώς, αφού υπολογίσαμε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων  $v$  και  $V$  του δορυφόρου και του συσσωματώματος αντίστοιχα είναι ίσα, το συσσωμάτωμα θα εκτελεί κυκλική τροχιά σε ύψος  $h_1$  από την επιφάνεια της Γης, με αντίθετη φορά όμως περιστροφής από αυτήν του δορυφόρου.

(μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

30.

4.1. Το ομογενές πεδίο μεταξύ των παράλληλων μεταλλικών πλακών, θα έχει ένταση

$$E = \frac{V}{L} = \frac{100V}{2 \cdot 10^{-2}m} = 5 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$$

**Μονάδες 5**

4.2. Το φορτίο ισορροπεί υπό την επίδραση δύο δυνάμεων, της βαρυτικής και της ηλεκτρικής δύναμης, οι οποίες πρέπει να είναι αντίθετες. Συνεπώς το φορτίο έλκεται ηλεκτρικά από τον πάνω οπλισμό, ο οποίος έχει θετικό φορτίο, άρα το σωματίδιο έχει αρνητικό φορτίο. Αν εφαρμόσουμε τον 1<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F = W \Leftrightarrow E|q| = mg \Leftrightarrow |q| = \frac{mg}{E} = \frac{10^{-3}kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{5 \cdot 10^3 \frac{V}{m}} = 2 \cdot 10^{-6}C$$

**Μονάδες 6**

4.3. Από την σχέση  $E = \frac{V}{L}$  προκύπτει ότι η ένταση  $E$  του πεδίου είναι ανάλογη της διαφοράς δυναμικού  $V$  μεταξύ των πλακών. Άρα, όταν διπλασιαστεί η διαφορά δυναμικού, θα διπλασιαστεί η ένταση και, κατά συνέπεια, η ηλεκτρική δύναμη, με αποτέλεσμα το φορτίο να πάψει να ισορροπεί. Αντίθετα, θα αποκτήσει επιτάχυνση, κινούμενο προς την θετική μεταλλική πλάκα. Η επιτάχυνση έχει μέτρο

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{2E|q| - mg}{m} = \frac{2mg - mg}{m} = g$$

Το σωματίδιο επιταχύνεται ομαλά και για να φτάσει στην θετική μεταλλική πλάκα θα διανύσει απόσταση  $s = L - d = 0,5cm$ . Θα χρειαστεί χρόνο

$$s = \frac{at^2}{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}m}{10 \frac{m}{s^2}}} = \sqrt{\frac{10^{-2}}{10}}s = \frac{0,1}{\sqrt{10}}s = \frac{\sqrt{10}}{100}s$$

**Μονάδες 7**

4.4. Όταν διπλασιαστεί η ένταση του πεδίου θα έχει μέτρο

$$E_1 = 2E = 2 \cdot 5 \cdot 10^3 \frac{V}{m} = 10^4 \frac{V}{m}$$

Από το σημείο Α μέχρι το σημείο συνάντησης, έστω Β, του φορτίου με την θετική μεταλλική πλάκα η διαφορά δυναμικού είναι

$$V_{AB} = E_1 s = 10^4 \frac{V}{m} 0,5 \cdot 10^{-2}m = 50V$$

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης από το Α στο Β είναι

$$W_{A \rightarrow B} = |q|V_{AB} = 2 \cdot 10^{-6}C \cdot 50V = 10^{-4}J$$

**Μονάδες 7**

31.

4.1. Η γραμμική ταχύτητα  $u$  κατά την περιστροφή ενός σώματος προκύπτει από την συνθήκη για την κυκλική κίνηση:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_K$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στον δορυφόρο Ιώ του Δία, είναι η βαρυτική έλξη, οπότε:

$$F_{\beta\alpha\rho} = F_K \Leftrightarrow G \frac{M_{\Delta} \cdot m_I}{R_I^2} = \frac{m_I \cdot u_I^2}{R_I} \Leftrightarrow u_I = \sqrt{G \frac{M_{\Delta}}{R_I}} \quad (1)$$

$$u_I = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,59 \cdot 10^{27}}{432 \cdot 10^6}} = 2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

**Μονάδες 6**

4.2. Η περίοδος της κυκλικής κίνησης της Ιούς δίνεται από την:

$$T_I = \frac{2\pi R_I}{u_I} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) την (1):

$$T_I = 2\pi \sqrt{\frac{R_I^3}{G \cdot M_{\Delta}}} \Leftrightarrow M_{\Delta} = \frac{4\pi^2 \cdot R_I^3}{G \cdot T^2}$$

όπου :  $T_I = 1.57 \text{ days} = 1,57 \cdot 86400 \text{ s}$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$R_I = 432 \cdot 10^3 \text{ km} = 432 \cdot 10^6 \text{ m}$$

και τελικά

$$M_{\Delta} = 2,59 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

**Μονάδες 6**

4.3. Υπολογίσαμε την περίοδο περιστροφής της Ιούς :  $T_I = 2\pi \sqrt{\frac{R_I^3}{G \cdot M_{\Delta}}}$

Ομοίως για την Ευρώπη θα είναι :

$$T_{Ev} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{Ev}^3}{G \cdot M_{\Delta}}}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη :

$$\frac{T_I}{T_{Ev}} = \sqrt{\frac{R_I^3}{R_{Ev}^3}} \Leftrightarrow \frac{1,57}{T_{Ev}} = \left( \frac{432 \cdot 10^6}{675 \cdot 10^6} \right)^{\frac{3}{2}} = 1,95 \text{ days}$$

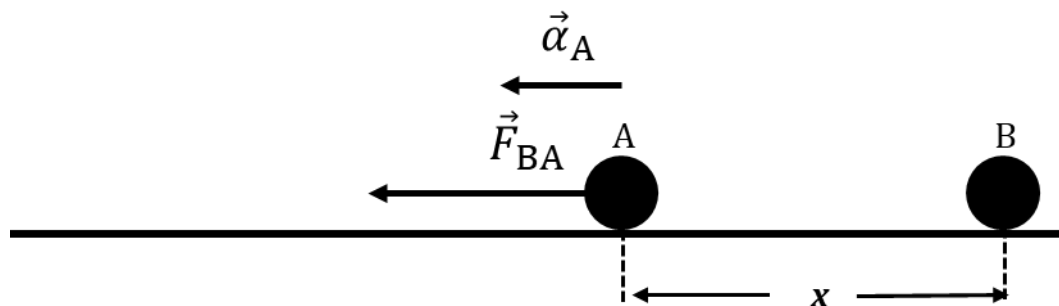


**4.4.** Για την ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Ιούς, ισχύει:

$$u_{\delta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_I}{r_I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^{22}}{18 \cdot 10^5}} = 2,58 \cdot 10^3 = 2,58 \text{ km/s}$$

32.

4.1.



Υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης Coulomb που δέχεται η φορτισμένη σφαίρα A από τη φορτισμένη σφαίρα B:

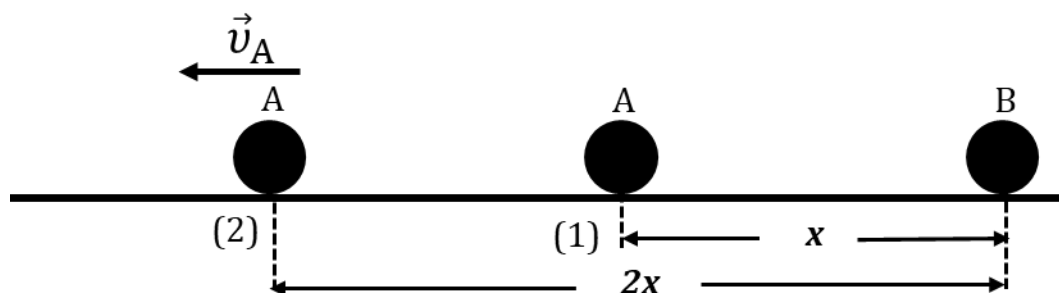
$$F_{BA} = k_C \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{x^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^{-7} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}}{(2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} \Rightarrow F_{BA} = 0,45 \text{ N}$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της επιτάχυνσης της σφαίρας A εφαρμόζοντας τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα:

$$F_{BA} = m_A \cdot a_A \Rightarrow a_A = \frac{F_{BA}}{m_A} = \frac{0,45 \text{ N}}{10^{-3} \text{ kg}} \Rightarrow a_A = 450 \text{ m/s}^2$$

Μονάδες 3+2=5

4.2.



Καθώς η δύναμη Coulomb είναι συντηρητική δύναμη, ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

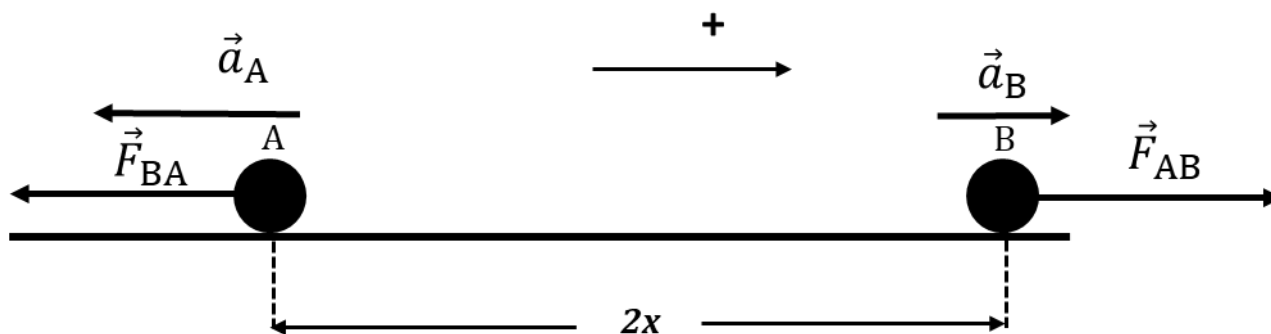
Μονάδες 2

Από τη θέση (1) μέχρι τη θέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{MHX,1} &= E_{MHX,2} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\ \Rightarrow 0 + k_C \frac{q_A \cdot q_B}{x} &= k_C \frac{q_A \cdot q_B}{2 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 \Rightarrow k_C \frac{q_A \cdot q_B}{2 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{k_C \frac{q_A \cdot q_B}{x \cdot m_A}} \\ \Rightarrow v_A &= \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^{-7} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} \Rightarrow v_A = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Μονάδες 5

4.3.



$$F_{BA} = F_{AB} = k_C \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{(2 \cdot x)^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^{-7} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}}{(2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} \Rightarrow F_{BA} = F_{AB} = \frac{9}{80} \text{ N}$$

$$F_{BA} = m_A \cdot a_A \Rightarrow a_A = \frac{F_{BA}}{m_A} \Rightarrow a_A = 112,5 \text{ m/s}^2$$

$$F_{AB} = m_B \cdot a_B \Rightarrow a_B = \frac{F_{AB}}{m_B} \Rightarrow a_B = 56,25 \text{ m/s}^2$$

Μονάδες 3+1+1=5

4.4. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας από τη θέση, όπου τα δύο φορτισμένα σωματίδια απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $x$  μέχρι την θέση, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $2x$ .

$$E_{MHX_1} = E_{MHX_2} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow$$

$$0 + k_C \frac{q_A \cdot q_B}{x} = k_C \frac{q_A \cdot q_B}{2 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 \quad (1)$$

Για το σύστημα των δύο φορτισμένων σωματιδίων ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow 0 = m_B \cdot v_B - m_A \cdot v_A \Rightarrow 0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot v_B - 10^{-3} \text{ kg} \cdot v_A \Rightarrow v_A = 2 \cdot v_B \quad (2)$$

Μονάδες 4

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$k_C \frac{q_A \cdot q_B}{2 \cdot x} = \frac{1}{2} v_B^2 \cdot (4 \cdot m_A + m_B) \Rightarrow v_B = \sqrt{k_C \frac{q_A \cdot q_B}{x \cdot (4 \cdot m_A + m_B)}} \Rightarrow v_B = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^{-7} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} \Rightarrow v_B = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m/s}$$

και από τη σχέση (2)

$$v_A = \sqrt{6} \text{ m/s}$$

Μονάδες 4